# 数的趣谈

〔美〕I. 阿西莫夫 著

上海科学技术出版社



# 数的趣谈

〔美〕I. 阿西莫夫 著

洪丕柱 周昌忠 译

黄绍元 校

上海科学技术出版社

ASIMOV ON NUMBERS

Isaac Asimov

Doubleday & Company，Inc.

1977，New York

# 数 的 趣 谈

〔美〕I. 阿西莫夫　著

洪丕柱　周昌忠　译

黄 绍 元　校

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　无锡县人民印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32 印张：8.625 字数 190,000

1980 年 12 月第 1 版　1983 年 8 月第 2 次印刷

印数：30,001－44,000

书号：13119·861　定价：（科三）0.70 元

# 出 版 说 明

伊萨克·阿西莫夫（Isaac Asimov）是美国的著名科学普及读物作家，他对各门科学都有着极大的兴趣和深入研究的毅力，并且愿意为广大爱好科学的读者提供通俗浅显的文章．经过顽强的努力和艰辛的劳动，阿西莫夫已成为一个多产作家，1979 年 2 月，美国出版商出版了他的第二百本书．从 1959 年起，阿西莫夫就每月给《幻想和科学小说杂志》，(The Magazine of Fantasy and Science Fiction）撰写一篇科学专栏文章，他以不拘形式的笔法涉及了各门学科，内容深入浅出，文笔情趣横溢，许多深奥的科学道理经过他的叙述，就获得了引人入胜的效果．美国双日出版公司（Doubleday & Company，Inc）在每当他为杂志写完十七篇文章时就将这些文章汇编成单行本出版，到目前为止已出版了十多册，共收集了二百多篇文章．这些小册子和他所发表过的其他著作一样，受到了美国广大读者的热烈欢迎．近年来，双日出版公司又将这些文章按学科整理出版，以满足对某一学科分支特别感兴趣的读者．现在已整理了有关天文学、化学、物理学、数学等方面的几本．我国目前已翻译出版了阿西莫夫的部分著作，为了让广大读者能够通过科普读物掌握更多的知识，我们将阿西莫夫谈论数学的文章汇编翻译介绍给大家，其余的几本也将陆续翻译出版．

本书根据 1977 年出版的原著翻译，原书名为《阿西莫夫论数》（Asimov On Numbers），翻译中个别地方作了删节．译文如有错误和不妥之处，欢迎读者指正．

本书各篇文章原载于《幻想和科学小说杂志》.
各篇的发表日期如下:

| | |
|---|---|
| 关于无限大种种 | 1969 年 9 月 |
| π点滴 | 1960 年 5 月 |
| 几何作图的工具 | 1960 年 9 月 |
| 并非虚幻的虚数 | 1961 年 3 月 |
| 这就是它的大小 | 1961 年 10 月 |
| 加上前缀 | 1962 年 11 月 |
| 二进制，十进制，及其互换 | 1962 年 12 月 |
| T 形数 | 1963 年 8 月 |
| 忘掉它! | 1964 年 3 月 |
| 从无开始计数 | 1964 年 7 月 |
| 我们历年的日 | 1964 年 8 月 |
| 从头开始 | 1965 年 1 月 |
| 感叹号! | 1965 年 7 月 |
| 水，水，到处都有 | 1965 年 12 月 |
| 质子计算器 | 1966 年 1 月 |
| 地球上的高处和低处 | 1966 年 2 月 |
| 地球上的岛 | 1966 年 6 月 |

# 目　　录

## 第七部分 数和地球

# 第一部分

# 数 和 计 数

# 1 从无开始计数

罗马数字，即使经过五个世纪废弃之后，对于一个有好奇心的人来说，似乎仍有一种特别的迷惑力.

依我看来，罗马数字之所以吸引人，其理由不外乎它们颇能令人自我陶醉，当你走过一块刻有“立于 MCMXVIII”字样的街角石的时候，它会给你一种感染力，使你情不自禁地自我感叹一番:“啊，原来是建于一九一八年”. 不论理由如何，罗马数字确是值得深入探讨的.

关于数和计数的概念，以及较小的和较常用的数字的名称，可以追溯到史前时代. 难以相信，今日地球上任何一个部落，不论其如何原始，会对数没有产生过某种概念的.

在发明书写之后(它标志着“史前”和“有史”的分界线)，随之而来的一步就是必须选取数字进行书写. 当然，对表示一定数目的词设想出一些书写记号来是很容易的，正象设想出其他单词一样简单. 在英文中，我们可以把一只手上的手指数目写成“five”，而把四肢所有的趾指数目写成“twenty”.

然而，很久以前，国王的税吏、史官、文牍们在游戏中就发现，数具有有序的特点，它具有一种固定的计数方法，并且对任何一个数都能用计数方法来达到加以定义，因此，对于需要计数到特定的数，为什么不制定一些记号呢?

例如，如果用′ 表示“一”，用″ 表示“二”，用‴ 表示“三”，那么，我们就能毫无困难地得出用给定记号标示的数. 可以理解，比如记号′′′′′′′′′′′′′′′′′′′′′′′ 表示“二十三”. 而且，这样的

记号是通用的，不论用何种语言来计数，也不论你的特殊语言用怎样的声音来念这个数，这个符号总是表示“二十三”.

把过于众多的记号记写成长长的没有间断的一行，就会使阅读发生困难，这就自然需要把它分成较小的组．如果我们习惯于用一只手来计数的话，那就很自然地把记号分成五个一组．这样，“二十三”就可以写成′′′′′ ′′′′′ ′′′′′ ′′′′′ ′′′．如果我们更老练一些，用两只手同时作计数的话，我们就可以把它写成′′′′′′′′′′ ′′′′′′′′′′ ′′′．如果我们同时又光着脚，把脚趾也用上的话，我们又可以把数分成以二十为一组．

所有这三种将数的符号分成组以便于使用的方法，在人类的各种记数方法中都留下了它们的痕迹，但最受人欢迎的是以十个为一组．因为总的说来，以二十个符号为一组毕竟太多，难于一目了然，而以五个符号为一组又在数目较大时造成过多的组数．这样，以十个为一组就成了比较令人喜爱的折衷．

接着，用一个独立的记号来表示以十为一组的数看来是一个很自然的想法．在可以把一个独立的记号，比如−，用于这个目的时，就没有理由每次都非得把十个为一组的数写成′′′′′′′′′′．因此，“二十三”就可以写成−−′′′．

一旦这样开了头，下一步就很清楚了．在以十为一组的数的组数达到十个即一百时，就可以引入另一个符号，比如+．十个一百，即一千，可以用=来表示，等等．这样“四千六百七十五”，这个数就可以写为：

$$= = = = + + + + + + - - - - - - - ′′′′′$$

为了使这样的一组记号更易于一目了然，我们可利用眼睛能识别图案的有利条件（大家知道，人们是怎样根据图案来说出一副纸牌或一对骰子中的数字的）．因此，我们又可以把

“四千六百七十五”写成:

$$\begin{array}{r} ==+++----''' \\ - \\ ==+++----'' \end{array}$$

事实上，古代巴比伦人正是用这种方法来书写数字的，不过他们是用楔形符号来表示的.

希腊人在其文明发展的较早阶段曾使用过一种与巴比伦人类似的方法. 但是稍后，另一种方法代之而流行起来. 他们创造使用了另一种有序法——字母表中的字母.

把字母表和记数方法联系起来是很自然的. 我们在儿童时代几乎同时被教会使用这两种方法，对外界对象的这两种有次序的方法很自然地趋于吻合.“a，b，c，d…”的序列念起来就同“一，二，三，四…”同样顺口，彼此之间很容易地相互代替.

如果我们使用毫无区别的符号，如''''''' 来表示“七”，那么该符号的所有组成部分都是相同的，而且如果该符号的意义仅表示是“七”而无其他别的意义的话，则所有的符号都必须一个不漏地包括进去；另一方面，如果“ABCDEFG”代表“七”(数一下字母就可以知道)，那么，由于每个符号各不相同，只需要写出最后一个字母就行了. 你不会弄错 G 是字母表里的第七个字母这个事实，因此它代表“七”. 用此方法，只以一个部分组成的符号便可起到由七个部分组成符号的作用. 此外，'''''' （六）看起来与''''''' （七）极为相象，而F（六）看上去却与 G（七）截然不同.

当然，希腊人使用的是他们自己的字母表. 这儿，让我们用自己的字母表来作一个完整的演示：A＝一，B＝二，C＝三，D＝四，E＝五，F＝六，G＝七，H＝八，Ｉ＝九，J＝十.

我们可以让字母 K 接下去等于“十一”，照这样下去的

话，我们的字母表只能帮助我们数到“二十六”．而希腊人有一个比较好的方法：既然巴比伦人的以十为一组的概念已留下了它的痕迹，如果 J＝十，那 J 除了等于十个客体外，而且也表示以十分成的一个组，那么为什么不继续用以后的字母来表示十位数呢?

换句话说，J＝十，K＝二十，L＝三十，M＝四十，N＝五十，O＝六十，P＝七十，Q＝八十，R＝九十．接着我们可以继续来记写百位数：S＝一百，T＝二百，U＝三百，V＝四百，W＝五百，X＝六百，Y＝七百，Z＝八百．这样就可以很方便地一直记到九百，但我们已把全部字母都用完了．不过，在以前的字母表里，表示“and”的符号“&”有时排在字母表的末尾．因此我们可以说，&＝九百．

再换句话说，最前面的九个字母表示一到九的个位；接下来的九个字母表示一到九的十位数；最后九个字母表示一到九的百位数（在古希腊的字母表中只有二十四个字母，但总共需要二十七个字母，因此希腊人使用了三个古体字母来凑满该表）．

这个方法与巴比伦人使用的方法相比，有优点也有缺点．优点之一是任何一个千以内的数字均可用三个符号来表示．比如，用刚才以字母表建立起来的方法来表示六百七十五是 XPE，八百十六是 ZJF．

希腊记数方法的一个缺点是，为了使用一千以内的数字，必须牢牢记住二十七个不同符号的意义．而在巴比伦记数方法中，只须记住三个不同的符号．

况且，希腊的记数方法在字母表中的字母用完时就自然而然地到了尽头．九百九十九（&RI）是在不引进特别的记号来表示千位数、万位数等等时，所能写出的最大的数字．关于

这个问题，将在以后再回过头来加以叙述．

希腊记数方法的一个相当含糊不清的缺点是，相同的一些符号既用于数字又用于单词，这在意义上就很容易使人混淆．比如，希腊罗马时代的犹太人，采用了希腊表示数字的方法后（当然是使用了希伯来字母表），很快就陷入困境．“十五”这个数字自然能写作‘十-五”，然而，在希伯来字母表中，“十-五”恰好表示了上帝的一个应予避讳的名字的简称，犹太人对于亵渎神明是特别犯忌的，就决定不用“十-五”而用“九-六”来表示“十五”这个数．

更糟的是，在希腊-希伯来记数方法中，单词看上去就好象一个数字．比方说，就用我们自己的字母表来说吧，WRA表示“五百九十一”，在字母表数字方式中：符号的排列次序通常是不严格的．虽然，正如我们将要看到的，这种情况对同样是字母表式的罗马数字来说是不正确的，而WAR同样可以意味着“五百九十一”(如果愿意的话，我们毕竟可以把它说成是“五百一和九十”“five hundred one-and-ninety”)；因此，很容易让人相信，在“五百九十一”这个数字里面，似乎包含着一些有关军事的、尚武的、和预兆不吉祥的涵义[①].

犹太人出自虔诚的要求，把神的语言抄录得十分精确，他们对圣经中的每一个音节都细加推敲，因而在所有的单词中都看到了数字．在新约时代，在圣经内出现了数字之间内在关系的一整套玄秘系统．这就是犹太人能达到最接近于数学的缘由，他们把这种数字化的单词称为 gematria，这个词系希腊词 geometria（几何学）一词的讹传，我们今天把它称作“数字秘义学（numerology)”.

① 英语 WAR 的词义是“战争”．译者注．

甚至直到今天，还有一些可怜虫，把数字与不同的字母相联系，以此来判断哪些名字有福气，哪些名字不吉利，哪个男孩应当娶哪个姑娘，等等．这当然是一种令人可笑的伪科学．

gematria 的一部分在后来的历史上留下了影响．gematria 的这些遗迹可在新约的最后一册《圣·约翰启示录》中找到，这本书用一种不畏文字狱的隐讳笔调写成．在我看来，文笔欠明晰的原因是十分显然的．《启示录》的作者曾对罗马政府加以抨击，如果他把话说得太明白，那就等于公开给自己加上了一个叛逆罪，便可招致钉死在十字架上的刑罚，因此，他便设法用这样的方式来写，使文章的意义对他的"圈内"读者看来是十分明了，而在罗马当局看来则是毫无意义的．

在第十三章中，作者把群兽说成是残暴的政权，在第十八节中他说道："这儿就是智慧，让懂得的人来算出群兽之数；因为符合群兽之数的人，他的数目等于六百六十六．"

很明显，作这样的安排，并非要把这种gematria的伪科学说成是神明的赞许，而仅仅是对该章中隐匿的比喻所指的那个具体的人物作一番含沙射影而已．现在差不多已经弄清，《启示录》写于尼罗（Nero）①对基督徒实行第一次大迫害后仅仅几十年．如果把尼罗的名字（尼罗·凯撒）用希伯来文来拼写，那么各字母所代表的数字之和恰恰就是六百六十六，即"群兽之数"．

当然，也可能有别种解释．事实上如果《启示录》在任何时候都被认为与其在写成的特定时代具有同样意义的话，它也可能涉及后来的一些反基督运动．由于这一原因，世代相袭，人们一直试图表明，用适当的语言，在姓氏的拼法上玩弄某些手法，并利用把字母定为适当的数字，就可能使某些私敌

① 尼罗，罗马暴君．公元 37～68 年在位．译者注．

带上群兽之数．

如果基督徒能把这个方法用于尼罗，那么只要犹太人愿意，他们自己也可能在下一个世纪把这个方法轻而易举地用于哈德连（Hadrian）[①]．而在五个世纪之后，这个方法又可（并确已）用于穆罕默德（Mohammed）[②]．在宗教改革时期[③]天主教对马丁·路德（Martin Luther）[④]的名字作了计算，发现它也符合群兽之数；清教徒也曾以此回敬，对几位教皇作了同样的计算，发现同样情况．

其后，宗教斗争为民族斗争所取代，通过适当的方法，亦曾算出拿破仑·波拿巴（Napoleon Bonaparte）[⑤]和威廉二世(William II）[⑥]符合群兽之数．更有趣的是，用我自己的字母表数字方法，只需几分钟时间，就可算出海尔·阿道尔夫·希特勒（Herr Adolf Hitler）也符合群兽之数，只需在其名字中添加一个 1 便成[⑦]．

罗马的记数符号的方法与希腊及巴比伦的方法均有相似之处．罗马人象希腊人一样使用了字母表里的字母，然而他们并不是按次序来使用它们的，而仅仅使用其中的几个字母，他们把这些字母每当需用时总是重复使用，这正象巴比伦方法一样．但与巴比伦方法的不同之处在于，罗马人并不每逢数字递增十个就发明一个新的符号，而是（更原始地）数字每

---

① 哈德连，罗马皇帝，公元 117～138 年在位．译者注．

② 穆罕默德，阿拉伯先知，伊斯兰教创始人，公元 570～632 年．译者注．

③ 十六至十八世纪欧洲普遍发生的对旧教的改革运动．译者注．

④ 马丁·路德，德国神学家，宗教改革领袖，公元 1483～1546 年．译者注．

⑤ 拿破仑，法国皇帝，公元 1804～1815 年在位．译者注．

⑥ 威廉二世，德国皇帝．公元 1888～1918 年在位．译者注．

⑦ 希特勒，纳粹党党魁，德国法西斯头子，公元 1889～1945 年．其全名为海尔·阿道尔夫·希特勒（Herr Adolf Hitler)，在 Adolf 中添加一个 l 就变成 Adollf，便符合群兽之数．译者注．

增五个就使用一个新的符号.

这样，从头开始，“一”的符号是 I，“二”、“三”和“四”的符号便能写成 II，III 和 IIII.

## 罗 马 数 字

这是伟大的天文学家约翰·刻卜勒（Johann Kepler）[①]为三十年战争期间的帝国将军阿尔勃烈希脱·玛·瓦伦斯坦（Albrecht von Wallenstein）所绘的一张算命天宫图（刻卜勒为谋生而绘天宫图，正如现代一位演员，即使是位优秀演员，也可能兼做点生意一样）.

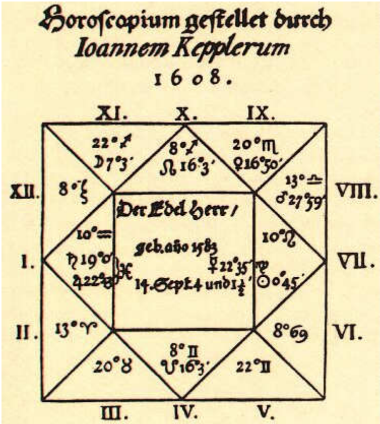


图 1 刻卜勒所绘的天宫图

尽管在天宫图上所用数字大多是阿拉伯数字，但十二宫的顺序仍用罗马字体，以获得更为强烈的印象．罗马数字，在人们认为它们在计算中无用而加以废弃之后，几世纪来，仍然是一种令人肃然起敬的标记.

虽然我们自己熟悉的数系是以 10 为基数且以 10 为幂的，罗马数字却以 5 为基数，对 1、5、10、50、100、500 和 1000 都制定了特殊的符号，很明显，这是因为我们每只手有五个指头，两只手共有十个指头的缘故.

在赤脚的社会里，不需一个多大的智力跃进即可确立以二十为基数的数字系统，中美洲的玛雅人[②]用十和二十来计数，并对 20、400（$20^2$）、8,000($20^3$)、160,000（$20^4$）等数字作出特别的符号.

虽然在西方的传统中并无正式的 20 进制，但我们仍以“*score*（二

① 约翰·刻卜勒，德国天文学家，公元 1571～1630 年，译者注.

② 玛雅人，中美洲古民族，曾有相当高度的文明．详者注.

十）来计数，当我们说到八十七时，常说“four score and seven”（四个二十加七）．事实上以二十来计数是十分常见的，正象我们在球赛时常讲的“keeping score（记录比赛分数）”并问“What's the score?　（比分怎样）”．

十二进制，即使不用专门符号，但在言语中也使用着，因为 12 可被 2、3、4、6 除尽，因此我们说到“打”以及“箩”，一箩等于 12 打，即 144 个．至于那个古代苏美尔人曾使用过以 60 为基数的系统，直至今天我们仍以 60 秒为一分钟，60 分钟为一小时．

然而，“五”的符号不是 IIII 而是 V．为何选用这么个特殊的字母作为符号，人们始终以极大的兴趣来穷究其原因，但迄今尚未找到能为大家普遍接受的解释，然而，当我把手指向上伸出时，如果把外伸的拇指当作 V 的一条线而把其余四指合并当作另一条线的话，V 可能就表示有五个手指的手的本身，这倒也算一种自得其乐的解释．这样，“六”、“七”、“八”、“九”就分别表示为 VI、VII、VIII、VIIII．

用符号 X 表示“十”，它表示两手腕对腕交叉（有人这么认为）．这样，“二十三”，就表示成 XXIII，“四十八”就可写成 XXXXVIII 等等．

“五十”的符号是 L，“一百”的符号是 C，“五百”是 D，“一千”是 M．C 和 M 是易于理解的，因为 C 是 *centurn*（意为“一百”）的起首字母，M 是 *mille*（“一千”）的起首字母．

然而，正是因为这个理由，这些符号就令人怀疑．最初，它们也许用来表示这些数字意义较少的原始符号．比如，“千”的符号看上去有点儿象（I）这么一个符号．一千的一半或者“五百”就是该符号的右半边，或 I)，以后，这个符号也许就转化成 D．不过为什么要用 L 来表示五十，我就说不出它的道理了．

现在，我们可以把“一千九百六十四”用罗马数字写成MDCCCCLXIIII.

根据这个方法来记写数字，其优点之一就是数字的记写次序可以不管．如果我把“一千九百六十四”写成 CDCL IIMXCICI，那么，如果把每个符号代表的数相加，它仍然表示一千九百六十四．然而，也不是任何人都可以用这样的方法随心所欲地把字母凑合成数．要是把字母按数值大小的严格次序来记写的话，正如我第一次所做的那样，那么，要把字母的数值加起来就要简单得多．而且，事实上这种按数值递减的次序来排列（除特殊情况外）的方法是一直沿用着的．

一旦罗马数字的字母书写顺序成为一种惯例，就可以使用这种固定的次序，如果它有助于简化事情的话．比如，假定我们规定，当数值较小的符号位于数值较大的符号之后时，则两符号的数值相加；而当数值较小的符号位于数值较大的符号之前时，就从后一个减去前一个．这样，Vl 就表示“五”，加“一”或“六’，而Ⅳ则表示“五”减“一”或“四”(甚至可以说IIV 表示“三”，但惯例是减去的符号不得多于一个)．用同样的方法，LX 表示“六十”而 XL 则表示“四十”，CX 表示“一百十”而 XC 则表示“九十”，MO 表示“一千一百”而 CM 则表示“九百”.

这种“减法法则”的好处在于，二个符号可以起到五个符号的作用．既然可议写成 IX，那么为了什么非要写成 VIIII 不可呢？或者，如果可以写成 CM 的话，那就不必写成 DCCCC．年份“一九六四”可以不用 MDCCCCLXIIII（十二个符号）而写成 MCMLXIV（七个符号），另一方而，一旦给书写顺序赋予意义，那就不再能把它们任意凑合，即使你想这么做也不行．例如，如果 MCMLXIV 被改写成 MMCLXVI，那么它就

变成了“二千一百六十六”.

减法法则在古代时兴时废，直到中世纪尚未正式采用．有一种有趣的理论认为，拖延的原因牵涉到该法则的最简单的使用，即 IV（“四”）．它是罗马主神 IVPITER 的最前面两个字母．罗马人可能对于即使书写这个名字的为首两个字母也有一种忌讳，甚至直到今天，在标有罗马数字的钟面上，“四”仍以 IIII 表示而不是 IV．这并不是钟面不接受减法法则，因为“九”是被标成 IX 而不是 VIIII 的．

用已给出的符号，我们可以用罗马数字写出直到“四千九百九十九”这么大的数字：MMMMDCCCCLXXXXVIIII．或者若使用减法法则，可写成 MMMMCMXCIX．你可能推测它下面的一个数“五千”可以写成 MMMMM 吧，但这种推测并不太正确，严格地说，罗马记数方法是永远不让一个符号重复出现四次以上的．通常采用一个新的符号来补救：比如 IIIII=V，XXXXX=L，CCCCC=D．那末，MMMMM 到底用什么表示呢？

没有指定用什么字母来表示“五千”．在古代，日常生活中很少需用这么大的数字．即使学者或税吏们能偶然遇到较大的数目，但他们的记数方法并不传达到老百姓那里．

记写“五千”或五千以上的数目的办法之一是用一条短横来表示千．这样，$\overline{\text{V}}$ 就可用来表示五千，而不是五，六万七千四百八十二就可写成 $\overline{\text{LXVII}}\text{CDLXXXII}$．

记写大数的另一种方法是回到用原始符号（I）来表示“千”．在此符号的两边加写弧形线，我们可以把数字以十的倍数来递增．这样，“一万”，就可以写成（(I)），“十万”就可以写成（((I))）；另外，又如“五百”可写成 I）或 D 那样，“五千”，便可写成 I)），“五万”可写成 I)))．

正如罗马人制定的特殊记号用来表示千数那样，希腊人也是这样做的．更进一步的是，希腊人还对一万和一百万制定了特别的符号（或者说，至少某些希腊作家是这么做的）．罗马人未曾把这个问题引至逻辑高度，这是不足为奇的，因为罗马人曾以自己的不文明自鸣得意，而希腊人对这一点也有所误解，这是永远使我惊讶的．

如果不专门对大数制定特别的记号，就不得不从个位数开始对每一种位数制定出特别的符号来，如果我们盯牢我在本章开头时讲过的方法不放，那就是用′表示个位数，用－表示十位数，＋表示百位数，＝表示千位数，则我们只要用一套九个符号就行了．我们可以在字母上方加一个小符号，即标出位数的类型＝＋－′写出一切数目．这样，“二千五百八十一”只要用从 A 到 I 这九个字母就可以得出，记写为 $\overset{=}{B}\overset{+}{E}\overset{-}{H}\overset{\prime}{A}$．进而，可以把“五千五百五十五”写作 $\overset{=}{E}\overset{+}{E}\overset{-}{E}\overset{\prime}{E}$．由于每个字母 E 上方标有符号，可以表明一个是“五”，一个是“五十”，另两个是“五百”和“五千”，不会混淆．由于将附加符号用于千、十万、百万等等，故任何数不论如何大，均可用此方式记写．

如果说这种办法没能被普遍采用，那也是不足为奇的．即使某一希腊人要想使用，他也会因必须记写这些细小的符号而觉得讨厌．在手抄的时代里，附加书写符号意味着附加了额外的劳动，当时的抄写员必定会对此大为不满．

当然，人们可以很容易地作出记号并非必要的决定．位数总是按数值自右至左递增的方法书写，这已为人们所接受了．个位数写在右端，十位数写在其左边，百位数又在其左边，如此等等．这样，BEHA 就表示“二千五百八十一”，而 EEEE 则表示“五千五百五十五”，在字母上方就不需加小符

号．

但在这里就要自然而然地产生一个困难，即如果在一个特定的数字中，没有十位数，或没有个位数，那将怎么办？比如象“十”或者“一百零一”这样的数．前者由一个十位数，无个位数组成；后者则由一个百位数，无十位数和另一个个位数构成．如果在上方使用小符号，数字就可以写成 $\overset{-'}{A}$ 和 $\overset{+}{A}\ \overset{-'}{A}$，这样，你就不能把小符号丢掉，如果丢掉小符号，那么如何区分意义是指“十”的 A 和意义是指“－”的 A，或者 AA 是指“一百零一”还是指“一百十”呢？

或许可以设法在两个字母之间留出一个空隙来表示“一百零一”，如 A　A，但这么一来，在手抄时代，它可能很快就变成 AA，也可能很快地把 AA 讹抄为 A　A．此外，在一个符号的末尾，又如何留出空隙来呢？不，即使希腊人想出这么一个方法，很明显，他们必定会得出在数字中留下空隙的简化做法是不切合实际的这样一个结论．因此，他们决定采用 J 表示“十”，SA 表示“一百零一”，这样比较保险些，而把小符号丢到阴间地狱里去．

简直没有一个希腊人——甚至包括阿基米德（Archimedes）本人——认为，使用空隙并不是绝对必要的．人们可以用一个表示“无”（无位数）的符号来填入空隙，假定我们用$作为这样一个符号，那么“一百零一”由一个百位数，无十位数和一个个位数构成，就可以写成 A$A．如果我们用这种方式处理，所有的空隙都能消灭，就不再需要在字母上方加注小符号了．“－”变成 A，“十”变为 A$，“一百”变为 A$$，“一百零一”变成 $\overset{+}{A}\overset{-}{\$}\overset{'}{A}$，“一百十”变成 AA$，等等．任何数，无论多大，均可用整整九个字母加上一个表示“无”的符号来记写．

当你知道了这个方法以后，你就会说，这的确是世界上最简单的事.

但是，从第一个数字符号开始计数到想出一个表示“无”的符号，竟占用了人类大约五千年的时间．是谁成功地解决了这个问题（这是一位在历史上最富于创造性的和具有独特见解的思想家），至今还不清楚，我们只知道可能是生活在不迟于九世纪的一个印度人.

印度人把这个符号称为 sunya 意即“空”. 这个表示“无”的符号被阿拉伯人学了去，他们把它称为 *sifr*，这在他们的语言中表示“无”的意思．这个词在传入我们的语言后被改变为“cipher”这个词，又通过 *Zefirum* 而变成“Zero（零)”.

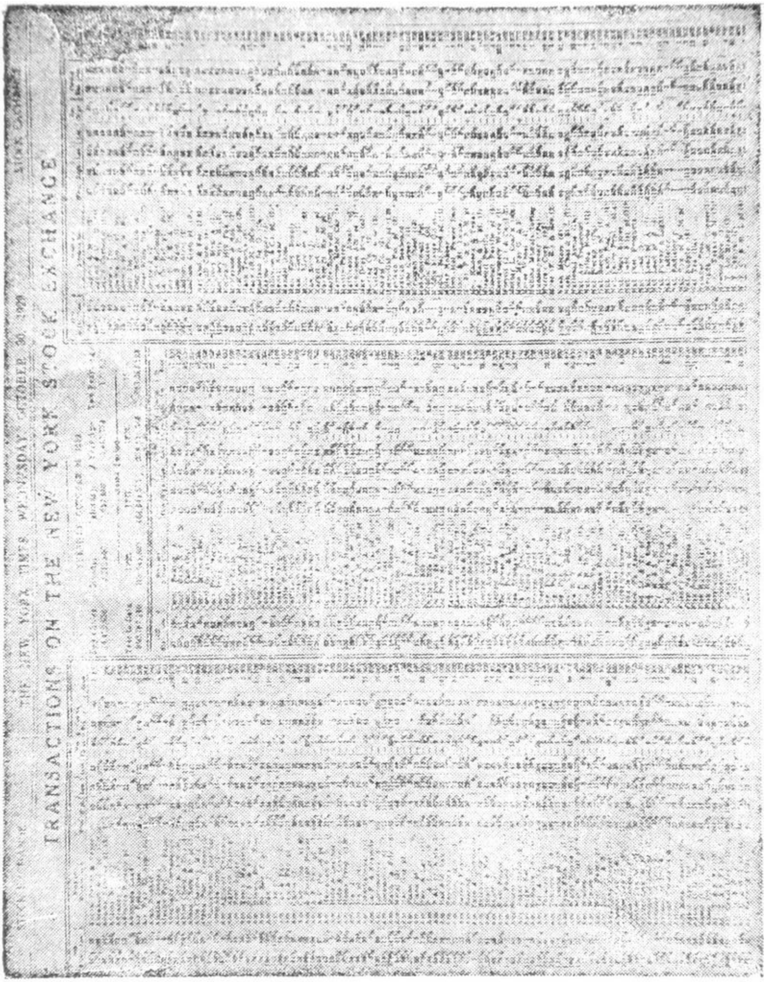
新的数字系统（因为这是欧洲人从阿拉伯人那儿学来的故称为“阿拉伯数字”）逐渐传到西方，而取代了罗马数字系统.

因为阿拉伯数字是从不用罗马字母表的国家传来，故数字的形状与罗马字母毫不相象．这也有好处，它消除了词和数间的混淆并使 gematria 从识字的人的日常生活中消失，成为只有少数人才愿意为此浪费精力的累赘的蠢事.

### 阿 拉 伯 数 字

在计算方面，用阿拉伯数字进行计算，远比人类发明的任何其他计算方法来得既简易又严密．只须设想一下，如把下表中所列的那些数字资料全部翻译成罗马数字（或任何别种数字)，得占据多大的篇幅呵，也许只有专家才能看得懂.

比方说，只要看一下数字的位数，就可以清楚地知道 12,000 大于 787．只需自上而下很快地扫视一下图中的最后一列数字，就可以一目了然地看出其中所列全部项目中最大的交易数是蒙哥马利集团的 285,000．它凑巧是这一列数字中第一个数字大于 1 的唯


THE NEW YORK TIMES, WEDNESDAY, OCTOBER 30, 1929

TRANSACTIONS ON THE NEW YORK STOCK EXCHANGE

图 2 纽约证券交易所的行情表

> 一的一个六位数．你可不必读出其它位数就可知道它是最大数．
>
> 这在其他任何数字方法中就不能做到．例如，有两个数字：XVIII 和 XL．两个符号的数字比五个符号的数字大两倍多．
>
> 当然，阿拉伯数字系统也有不足之处，它除数值而外没有更多的东西．每个数字仅有一个数值，每个数位亦仅有一个数值．要是遗漏了一个数字或是写倒了一个数字的位置，就会使人不知所措，比如，把 redundancy（多余）这个词中的一个字母漏写，变成 redundncy，几乎人人都会马上知道它的正确拼法应该怎样；或者把其中两个字母写颠倒，变成 rednudancy，大家也能看出错误并能加以原谅．
>
> 但如果把 2835 中的一个数字 8 漏写而变成 235，或者把其中二个数写颠倒而变成 2385，就无法察觉任何错误的痕迹，也没有任何重新找出正确数值的办法．
>
> 顺便提一句，该图表明 1929 年著名的股票市场大跌价．米德兰钢铁公司下落了 60 点，默里公司则从一年的最高点 $100\frac{7}{8}$掉到了 20．噢，好家伙！

当然，今天我们所使用的阿拉伯数字是 1，2，3，4，5，6，7，8，9 以及极端重要的一个 0．我们今天对这些数字是如此信赖（它们目前已为全世界所接受），甚至我们还没有意识到对它们依赖到何种程度．比如，如果这一章对你说来好象显得十分空洞，那恐怕是我从头至尾都小心地避而不用阿拉伯数字的缘故．

大家都知道阿拉伯数字对算术运算带来了极大的简洁性，正因为出现了零，它们给人类的脑力所解除的不必要的负担简直是无可估量的．这一事实在英语中也未被忽视．零的重要性反映在这样一个事实中，当在我们进行算术运算时，我们说我们是在“ciphering（计算）”（用一个目前已显得陈旧的术语来说）．而当我们在译解某些密码时，我们说我们是在

deciphering（破译）”[①].

因此，如果你再看一下本章的标题，你就会发现，我并不是在咬文嚼字．我是从文学角度意味着的．从无开始计数！“无”的符号使世界整个儿地改了观！

## 2 二进制，十进制，及其互换

自从我觉得（内心暗自思忖）自己不擅长解数学难题以来，总是为我自己的才华不济而感到暗自惊讶．诚然，许多挚友都给我作了解释，说在我的内心深处有一种巧妙隐藏着的笨脾气，但这种说法我却从未接受过．

不幸的是，舍此而外我又提不出其他的解释．

你一定想象得出，当我偶然解开一道自己能找到答案的难题时，我有多么开心．在我还很年轻的时候，曾凑巧有这么一件事，一直使我终生难忘，现让我较为详细地说给你听，因为这件事能把我带到我要说的问题上去．

问题的内容是这样的：随便给你一些单位砝码，如一克，二克，三克，四克等等．你可以在这些单位砝码之外选择一个足够大的数字，用适当的方法把砝码相加起来，就可以得到从一克到一千克的任何整克数的重量．但是，用什么办法来选择单位砝码，能以个数最少的砝码来做到这一点呢？

我就这样来推理：

我必须从一克重的砝码开始，因为只有用它才能称起一

① cipher 的原意为“零”，来自阿拉伯文 *sifr*，后转义为动词，具有“计算”的意义，decipher 是它的反义词．转义为“破译”，作者以此说明阿拉伯数字对英语的影响．译者注．

克的重量．现在，如果再取另一个一克重的砝码，我就可以用这两个一克重的砝码称起二克的重量，然而，我可以取一个二克重的砝码来代替两个一克重的砝码，这样可以更省事些，因为这时我不仅可以用它来称起一克的重量，而且可以使用这个二克重的砝码加上一个一克重的砝码来称起三克的重量．

接着怎么办呢？也许取一个三克重的砝码吧？那是多余的，因为三克的重量已经可以用二克加一克来称出．因此我就可以跳过一步而选取一个四克重的砝码，这就不仅能使我称起四克的，也可以称起五克（四克加一克），六克（四克加二克）和七克（四克加二克加一克）的重量．

际此，我就看到了一个规律，如果我所能达到的最大重量是七克，则下一步我就可以取一个八克重的砝码，这就使我能称出十五克（八克加四克加二克加一克）以下的任何整克数，再下一步将是取一个十六克重的砝码，很清楚，为了称出任何克数，必须取一系列的砝码（从一克开始），每取一个砝码都是小于它的那个砝码的双倍数．

这就是说，我可以用十个而且只需十个砝码就称出一克到一千克的任何整克数，它们是：1 克，2 克，4 克，8 克，16 克，32 克，64 克，128 克，256 克，512 克．实际上，这些砝码可以一直称到 1023 克的的重量．

现在，我们可以把砝码丢开，只用数字来计算．用 1，2，4，8，16，32，64，128，256，512 这些数字，而且只用这些数字，你可以用把它们中的两个或两个以上相加起来的办法表达出直到 1,023 并包括 1,023 本身的任何整数．比如，100 这个数就可以表达为 64 加 32 加 4．729 这个数可以表达为 512 加 128 加 64 加 16 加 8 加 1，当然，1,023 可以表达成所有这

十个数字之和．

如果在这个数字系列中再加入 1,024 这个数，你就可以继续构成直至 2,047 以下的数字，如果你接着再加上 2,048，那么你就可以继续构成至 4,095 以下的数字．如果下一步……

这样，如果从 1 开始，然后无限地倍增下去，你就可以得到一个数列，把这些数通过适当的方法相加起来，就可以用来表示任何有限的数字．

到此为止，情况很不错，但我们有趣的数列——1，2，4，8，16，32，64……似乎显得有点凌乱，肯定存在一种更简洁的表达方法，下面就来谈这个问题．

让我们暂且把 1 扔开，先对 2 作一番研究．如果我们这样做的话，可以从这样一个重要的声明开始，那就是 2 就是 2（有任何异议吗？），然后挨到下一个数，我们说 4 是 2 乘 2，8 是 2 乘 2 乘 2，16 是 2 乘 2 乘 2 乘 2，32 是……这样，你就可以得出一个概念了．

因而，我们可以这样来建立数列（仍然不去理会 1)：2，2 乘 2，2 乘 2 乘 2，2 乘 2 乘 2 乘 2，等等．这样就显出了一种和谐的一致性和规律性，但所有那些 2 乘 2 乘 2 都会在眼前引起厌恶．因此，使用指数方法，就可以不写出所有的 2 而方便地看出有几个 2 的相乘．

这样，如果 4 等于 2 乘 2，我们可以把它叫作 $2^2$．(2 的二次幂，或者说 2 的平方)．进而如果 8 是 2 乘 2 乘 2，我们可以把 8 写成 $2^3$（2 的三次幂，或 2 的立方）来记写三个 2 的相乘，按照这条路线继续下去，必定可以得到 16 是 $2^4$（2 的四次幂)，32 是 $2^5$（2 的五次幂）等等．至于 2 本身，只包含一个 2，我们可以把它叫 $2^1$（2 的一次幂)．

还有一件事，我们可以令 $2^0$（2 的零次幂）等于 1（事实上，令任何数的零次幂等于 1 都是可以的；即 $3^0$ 等于 1，$17^0$ 和 $1,965,211^0$ 也都如此，但目前我们只对 $2^0$ 感兴趣，故令它等于 1）.

这样，我们就可以用 $2^0$，$2^1$，$2^2$，$2^3$，$2^4$，$2^5$，$2^6$……来取代数列 1，2，4，8，16，32，64……就各项的数值来看，它是同样的一个数列；不过用第二种方法来写，多少显得好看一些，而且，正如我们即将看到的，要更有用一些.

我们可以用这些 2 的幂来表示任何数．上面已说过，100 可以表达为 64 加 32 加 4，就是说，它可以表达为 $2^6$ 加 $2^5$ 加 $2^2$．用这样的方法，如果 729 等于 512 加 128 加 64 加 16 加 8 加 1，则它也可表达为 $2^9$ 加 $2^7$ 加 $2^6$ 加 $2^4$ 加 $2^3$ 加 $2^0$．当然，1,023 等于 $2^9$ 加 $2^8$ 加 $2^7$ 加 $2^6$ 加 $2^5$ 加 $2^4$ 加 $2^3$ 加 $2^2$ 加 $2^1$ 加 $2^0$.

接着我们把这个方法系统化．我们用十个 2 的不同的幂来表示任何小于 1,024 的数，我们理所当然地要提到所有这些数．在表达某一个特定数字所作的加法中，如果不想使用某一个幂，那只需把它乘以零；如果需要用它，那就乘以 1，或是使用某个幂，或是不用它；或是将它乘以 1，或是乘以零，那就是我们唯一的选择.

如果用一个点来表示乘法，我们就可以说 1,023 是：$1·2^9$ 加 $1·2^8$ 加 $1·2^7$ 加 $1·2^6$ 加 $1·2^5$ 加 $1·2^4$ 加 $1·2^3$ 加 $1·2^2$ 加 $1·2^1$ 加 $1·2^0$，所有的幂都用上了．表示 729，可以写成：$1·2^9$ 加 $0·2^8$ 加 $1·2^7$ 加 $1·2^6$ 加 $0·2^5$ 加 $1·2^4$ 加 $1·2^3$ 加 $0·2^2$ 加 $0·2^1$ 加 $1·2^0$；再者，表示 100，可以写成 $0·2^9$ 加 $0·2^8$ 加 $0·2^7$ 加 $1·2^6$ 加 $1·2^5$ 加 $0·2^4$ 加 $0·2^3$ 加 $1·2^2$ 加 $0·2^1$ 加 $0·2^0$.

你也许要问，为什么要把这些用不到的幂也包括进去，既把它们写了进去，而又通过乘以零把它们抹去，这不是自找

麻烦吗？然而问题在于，如果把它们毫无例外地一律写出来，就可以把它们的存在视为当然，然后把它们全部抹去，只保留1和0.

这样，我们可以把1,023写成111111111，而把729写成1011011001，把100写成0001100100.

事实上，我们可以把它加以系统化，记住幂的次序，就可以把1到1,023的所有整数用2的十个幂来表达如下：

0000000001 等于 1
0000000010 等于 2
0000000011 等于 3
0000000100 等于 4
0000000101 等于 5
0000000110 等于 6
0000000111 等于 7
依次类推，直到
… … … … …
1111111111 等于 1,023

当然，我们不必把自己局限在2的10次幂以下，可以有11次幂，14次幂，53次幂，或无限大的一个数次幂，然而，写出无数个1和0，仅仅为了表示这无数个2的幂中哪一个要用，哪一个不用，确是件很繁琐的事．因此，约定对某特定数字，把所有不用的2的高次幂略去不写，仅仅从所用的最高次幂开始写，并从它开始继续写下去．换句话说，把所有左边无间断的一连串零都略去不写，这样，这些数就可以表示成：

1 等于 1
10 等于 2
11 等于 3

100 等于 4

101 等于 5

110 等于 6

111 等于 7 等等

用这样的方式，所有数字都可以用 1 或 0 的某种组合来表示．事实上，也有一些原始的部落曾经使用过这样的一种记数方法．然而，文明世界最早系统地发现这一点的数学家是大约三个世纪前的莱布尼兹（Gottfried Wilhelm Leibniz）．他曾为此而大觉惊异，但又觉得心满意足，因为他推断说，1 表示统一，很明显是上帝的标记，而 0 表示无，在上帝的身边，处于万物的开端．因此，如果只用 1 和 0 就可以把所有的数字都表示出来的话，那无疑是说，上帝从虚无中创造了宇宙．

尽管这种象征叫人敬畏，但 1 和 0 的这种玩意儿对无论哪一位实际办事的人都未曾留下什么印象．这也许是一个叫人留恋的数学奇观：但没有哪一个会计人员会愿意用 1011011001 来代替 729．

但以后突然地发现这种二进数制（也称为“二元数系”，来自拉丁文 *binarius*，意即“每次二个”）对电子计算机来说却是很理想的．

总之，两个不同的数字 1 和 0 在计算机上可以通过一个特别按钮的两种不同位置“开”和“关”来进行搭配．令“开”表示 1，“关”表示 0．那末，如果机器有十个按钮，数字 1,023 就可以表示为开开开开开开开开开开，而 729 则可表示为开关开开关开开关关开，100 可表示为关关关开开关关开关关．

通过增加按钮，就可用这种开关的组合来表示我们要表示的任何数字．它也许对我们显得相当繁琐，但对计算机来说却是十分简单．说实在的，用于计算机再也想不出比它更

简单的其他数制了.

## 莱 布 尼 兹

哥特弗里德·威尔赫姆·莱布尼兹于 1646 年 7 月 1 日出生于萨松尼的莱比锡，是位罕见的神童. 他八岁自学拉丁文，十四岁自学希腊文，1665 年获得法学学位，同时又是外交官、哲学家、政论作家并试图作为天主教徒和新教徒之间的一名调停者，间或还做过俄国彼得大帝的顾问. 1671 年他第一个发明了一台能进行加、减、乘、除运算的机械.



图 3 莱布尼兹象

莱布尼兹曾于 1673 年访问伦敦，此后开始从事称之为微积分的数学分支的研究，1684 年发表著作，差不多同时，伊萨克·牛顿（Isaac Newton）也独立完成了微积分的研究，但牛顿凡事总有点儿小心眼，致使他的天才不能尽情发挥. 他责备莱布尼兹是剽窃者，在这两个人的辩护者之间展开了长期的论战. 但实际上，莱布尼兹的发展是十分出色的，在英国，由于坚持追随牛顿，以致在数学方面落后了一个半世纪.

> 1700 年，莱布尼兹劝说普鲁士国王弗莱德里克（Frederick）一世建立了柏林科学院，并出任第一任院长．然而，整个壮年时代他差不多都在汉诺威选帝侯手下工作，1714 年，当时的选帝侯登上大不列颠王位成为乔治（George）一世时，莱布尼兹曾热望随他一起赴伦敦．
>
> 可是，做国王的并不是事事信赖别人，却总是唯我独尊，乔治一世已不再需要莱布尼兹，莱布尼兹晚年已被人遗忘．于 1716 年十一月十四日死在汉诺威，送葬者只有他的秘书一人．

然而，由于我们是人而非机器，问题就来了，我们能不能掌握二进制？比如，我们能否在二进数和普通数字之间进行相互换算？如果给你一个二进数 110001，它表示哪一个普通数字呢？

其实这并不难．二进制使用 2 的幂，从其右端以 $2^0$ 开始，每向左移动一位，幂指数即增加 1．因此我们可以在数字 110001 的下方以小一号字体的数字来表示指数，比如 $\underset{5}{1}\underset{4}{1}\underset{3}{0}\underset{2}{0}\underset{1}{0}\underset{0}{1}$．只有 1 下方的指数是有用的，因此 110001 就表示成 $2^5$ 加 $2^4$ 加 $2^0$ 或 32 加 16 加 1，换句话说，二进制中的 110001 在普通数制中表示 49．

用另一种方法还要更省事些．如果愿意的话，可以不管好歹地设法把 2 的幂与普通数字配对，但并不是非此不可．这儿有一个常规的方法可供使用，它总是灵验的．下面让我慢说来．（请原谅！这个方法为什么灵验恕我不作解释了）．

假定要把一个普通数字换算成二进数，你可以把它除以 2，把余数写在一边（如果该数为偶数，则余数为零，如果为奇数，则余数为 1）．再把商的整数部分除以 2，再次把余数放在一边，再把新的商的整数部分除以 2，这样重复除下去，直到商的整数部分减为零为止．把余数从末尾往回读，就得出

二进制中原来的数.

如果这听起来好象很复杂的话，可以举一例子来说明，就会简单明了，试以 131 为例:

131 除以 2 商为 65 余 1
65 除以 2 商为 32 余 1
32 除以 2 商为 16 余 0
16 除以 2 商为 8 余 0
8 除以 2 商为 4 余 0
4 除以 2 商为 2 余 0
2 除以 2 商为 1 余 0
1 除以 2 商为 0 余 1

这样，在二进制中，131 就可写成 1000011.

只需稍作练习，每个具有四年级算术知识的人都可以学会普通数和二进数之间的相互换算.

二进制还有一个好处. 就是它使普通数字的算术运算变得特别简单. 使用普通数字，我们在低年级时要花数年来记住 9 加 5 等于 14，8 乘 3 等于 24 等等，但是在二进制中，总共只有两个数字: 1 和 0. 因而，一次取两个数字做加法时，它们的和只有四种可能性: 0 加 0，1 加 0，0 加 1，1 加 1. 前三个和正巧与普通数字的算术运算中完全相同，即:

0 加 0 等于 0
1 加 0 等于 1
0 加 1 等于 1

第四个和稍有不同: 在普通数字的算术中，1 加 1 等于 2，但在二进制中没有 2 这一个数字，2 在二进制中被表示成 10，因此，

1 加 1 等于 10（记下 0 进 1）

可以想象，在二进制中加法将变得如何简单，如果想把 1001101 和 11001 相加，则它们的和将为：

$$\begin{array}{r} 1001101 \\ 11001 \\ \hline 1100110 \end{array}$$

你可以轻而易举地根据我刚才给你的加法表把它们换算成普通数字（假定你已学会），你就可以看出，上述加法相当于 77 加 25 等于 102.

在你看来，要习惯于 1 和 0 实在是很困难的，记忆加法规则简便多了，但这抵不上失去对整个事物的联系的不便．对人来说，这也许是事实．但在计算机中，开关按钮很容易设计成这样的组合，使开和关能服从二进制中的加法规则．计算机不会将大量的电子振动脉冲弄乱，并且可以通过二进制加法在几微秒内将数字相加起来．

当然（再回到人上来），如果想把两个以上的数字相加起来，最糟糕的是总得把这些数两两分组．如果把 110，101，100 和 111 相加，可以先把 110 和 101 相加，得到 1011，然后把 100 和 111 相加，得到 1011，最后把 1011 加上 1011 得到 10110（最后一个加法涉及到把 1 加 1 加 1，当作把 1 加入已经是 1 加 1 的竖列中去的结果；但 1 加 1 是 10，而 10 加 1 是 11，故 1 加 1 加 1 是 11，记 1 进 1）．

在二进制中的乘法甚至更为简单．同样，也只有四种可能的组合：0 乘 0，0 乘 1，1 乘 0，1 乘 1．这里，二进制中的每一个乘法完全与在普通数字中的一样，即：

0 乘 0 等于 0

0 乘 1 等于 0

1 乘 0 等于 0

1 乘 1 等于 1

把 101 与 1101 相乘，可以得到

```
      1 0 1
    1 1 0 1
-----------
      1 0 1
    0 0 0
  1 0 1
1 0 1
-----------
1 0 0 0 0 0 1
```

这相当于在普通数字中 5 乘 13 等于 65．同样，计算机可设计成通过操作按钮的开和关以配合二进制乘法表的要求，并以令人眼花缭乱的速度进行．

也可能建立一个以 3 的幂为基数的数制（三进制，或“三元”数系）．其数列为 $3^0$，$3^1$，$3^2$，$3^3$，$3^4$ 等等（即 1，3，9，27，81 等等），它们亦可用来表示任何指定的数字，如果允许将该数列中每项最多使用两次的话．

这样，17 是 9 加 3 加 3 加 1 加 1；72 是 27 加 27 加 9 加 9．

如果想根据三进制来写出整数的数列，它们将是 1，2，10，11，12，20，21，22，100，101，102，110，111，112，120，121，122，200 等等．

也可以建立一个四进制的数制，它以 4 的幂为基数，每个幂最多可用三次；一个五进制的数制，以 5 的幂为基数，每个幂最多可用四次，等等．

将普通数字换算成其他一种数制，只需用类似于我已在二进制中演示过的那种方法，以三进制来说，可重复地除以

3；以四进制来说，可重复地除以 4，等等．

这样，我刚才已将普通数字 131 通过重复除以 2 并使用余数来换算成二进制数 11000001，现在如果我们以 3 来除 131，并使用余数：

131 除以 3 商为 43 余 2
43 除以 3 商为 14 余 1
14 除以 3 商为 4 余 2
4 除以 3 商为 1 余 1
1 除以 3 商为 0 余 1

将余数自下而上地写出，则 131 在三进制中就可表达为 11212．

用同样的方法，可以分别得出 131 在四进制中，五进制中等等是怎么样的数字．这儿列出一张简明表，表中给出了 131 一直到九进制中的数值：

| | |
|---|---|
| 在二进制中 | 11000001 |
| 在三进制中 | 11212 |
| 在四进制中 | 2003 |
| 在五进制中 | 1011 |
| 在六进制中 | 335 |
| 在七进制中 | 245 |
| 在八进制中 | 203 |
| 在九进制中 | 155 |

可以通过幂来检验这些数字．比如，在九进制中，155 是 $1\cdot9^2$ 加 $5\cdot9^1$ 加 $5\cdot9^0$．由于 $9^2$ 为 81，$9^1$ 为 9，$9^0$ 为 1，所以 81 加 45 加 5，即 131．在六进制中，335 为 $3\cdot6^2$ 加 $3\cdot6^1$ 加 $5\cdot6^0$，由于 $6^2$ 为 36，$6^1$ 为 6，$6^0$ 为 1，所以 108 加 18 加 5，即 131．在四进制中，2003 是 $2\cdot4^3$ 加 $0\cdot4^2$ 加 $0\cdot4^1$ 加 $3\cdot4^0$，由于 $4^3$ 为

64，$4^2$ 为 16，$4^1$ 为 4，$4^0$ 为 1，所以 128 加 0 加 0 加 3，即 131.

你可任选其余各数，自作一番验算.

## 计　算　机

计算机在当今受到舆论的非议，认为它们一无灵感二无人性.但人们盼望的是什么呢？他们成十亿地生活在地球上，他们坚决支持着成千亿地化钱的政府（他们确实是这样做的.每个美国人都赞成削减政府的开支，除非这样做会危及他们的生活方式；由于每项削减都会损害成百万人的生计，因此就无法作出什么削减），他们坚决主张庞大的企业、庞大的科学事业、庞大的武装部队以及庞大的一切.这就使事情变得如此复杂，要是少了计算机，简直是寸步难行.

当然，计算机也会犯可笑的错误，但问题根子不在计算机上，而在为计算机编写程序或操作者身上.如果轧不平你的支票存根，你到底责怪数制呢还是责怪你的加法技巧蹩脚？（责怪数制吗？那我猜想你也会责怪计算机的.）



图 4　电子计算机

缺之人性吗？我猜想，原始的苏美尔人建筑师也曾有过这样

的埋怨．在测量所建筑的庙宇距离时，也会因他的年轻学徒所带的打结头的绳子感到生气和讨厌，他会说，建筑师应当使用他的头脑和眼睛，不应当依赖全无灵性的机械工具．

的确，人们对计算机所说的坏话仅仅是想当然的貌似聪明的低劣攻击，已经无法把计算机从社会生活中分离出去，除非是引起灾难．要是所有的计算机罢工二十四小时，你就会体会到什么是一个完全闭塞的国家的含义．

在充分利用了我们现代技术益处的同时又对之加以指责真是件十拿九稳的事，不必付出任何代价．

但事情是不是到九进制为止了呢？是否还有十进制？好吧，假定我们在十进制中写下 131，用 10 来把它除一下：

131 除以 10 商为 13 余 1

13 除以 10 商为 1 余 3

1 除以 10 商为 0 余 1

可见 131 在十进制中为 131．

换句话说，我们的普通数制就是十进制，用 10 的一系列幂来写：$10^0$，$10^1$，$10^2$，$10^3$ 等等．数字 131 等于 $1\cdot10^2$ 加 $3\cdot10^1$ 加 $1\cdot10^0$．由于 $10^2$ 为 100，$10^1$ 为 10，$10^0$ 为 1，这就意味着，100 加 30 加 1，即 131．

由此可见，普通的数制完全不是基本的或者基础的记数制．它们是建立在 10 的幂的基础上，因为我们有十个手指，我们是以手指开始计数的，但任何其他数字的幂同样也能满足数学上的所有要求．

这样，我们可以继续下去，得到十一进制和十二进制．但在这里产生了一个困难，任何数制中的数字符号的个数（把零算在内）都相当于用作基数的数字．

在二进制中，需要两个不同的数字符号：0 和 1，在三进

制中，需要三个不同的数字符号：0、1 和 2．当然，在我们熟悉的十进制中，需要十个不同的数字符号：0，1，2，3，4，5，6，7，8 和 9．

那末接下来，在十一进制中，就需要十一个不同的数字符号，在十二进制中，则需要十二个不同的数字符号．可把第十一个数字符号记作@，把第十二个数字符号记作＃．在普通的十进制中，@表示 10，而＃为 11．

这样，在十一进制中，131 为：

131 除以 11 商为 11 余 10（@）

11 除以 11 商为 1 余 0

1 除以 11 商为 0 余 1

因此，131 在十一进制中为 10@．

在十二进制中，

131 除以 12 商为 10 余 11（＃）

10 除以 12 商为 0 余 10（@）

故在十二进制中，131 为@＃．

如果需要的话，我们还可以再一步一步地上溯，得到 4,583 进制（把零算在内，需要 4,583 个不同的数字符号）．

现在看来，使用哪一种数制都是合理的，问题在于使用哪一种数制最为方便．随着基数的逐步增加，数字似乎变得越来越短．虽然 131 在二进制中是 11000001，在十进制中是 131，在十二进制中只是@＃，从八位数缩短成二位数．事实上，在 131（或更高的）进制中，它会变成只有一位数．从这方面来看，说明方便性增加了．谁会需要长长的数字呢？

然而，随着基数的增加，用于构成数字的不同数字符号也增加，这就增加了不方便．应当找到一种折衷的数制，在这种

数制中，所用不同的数字符号并不太多，而我们常用数字的数位又不太长.

很自然地，对我们来说，似乎是十进制最恰当. 记住十个不同的数字符号，似乎不必付出太高的代价，而构成一万以下的任何一个数字时，最多只需使用四个数字符号就可组合了.

当然，十二进制也常常被提出来. 在十二进制中，四个数字符号的组合可以表达二万多一些的数目，但这个好处看来还抵不上学习掌握二个额外的数字符号所增加的困准（小学生将不得不记住诸如@加 5 等于 13，# 乘 4 等于 38 等等的运算）.

这里，还出现了另一种说法. 在谈及任何一种数制时，往往趋向于谈论如 10，100，1000 之类的整数. 在十进制中，10 只能被 2 和 5 整除. 而在十二进制中，10（相当于十进制中的 12）可以被 2，3，4，6 整除，这意味着十二进制更适用于商业往来. 其实，十二进制在以打（十二个）、箩（一百四十四个）出售商品时就被应用了. 因此，在十二进制中，12 即为 10，144 即为 100.

然而，在当前计算机的时代里，二进制显得更有吸引力. 但二进制是一种由 1 和 0 组成的既不协调又不美观的混合体，因而有一种可能的折衷.

二进制和八进制有着密切的联系，因为在二进制中的 1000 等于八进制中的 10，或者你愿意的话可写成 $2^3$ 等于 $8^1$，因此，可以建立下列对应关系：

| 二进制 | 八进制 |
|---|---|
| 0 0 0 | 0 |
| 0 0 1 | 1 |
| 0 1 0 | 2 |

| | |
|---|---|
| 0 1 1 | 3 |
| 1 0 0 | 4 |
| 1 0 1 | 5 |
| 1 1 0 | 6 |
| 1 1 1 | 7 |

这个表格可以把八进制中的所有个位数（包括 0）同二进制的所有三位数（包括 000）联系起来.

因此，任何一个二进制数字都可分拆成三个数字为一组（需要时在左端加 0）并使用上表换算成八进制数字. 这样，二进数 111001000010100110 就能分拆成 111，001，000，010，100，110，即可写成八进数 710246，八进制数字 33574 可以写成二进制数字 011011101111100. 一旦记住了上表，换算速度就几乎同书写速度一样快.

换句话说，如果我们从十进制改变为八进制，则我们同机器之间能有更多的相互理解，谁知道科学又会进步得多快呢.

当然，这样的改变是不切实际的. 但只要想一想，假定起初原始人学会只用他的八个手指来计数，把这两个笨拙又讨厌的拇指丢开的话，那该有多好啊！

## 3 感 叹 号！

我可以告诉你，爱情中的单相思可真是件令人痛苦的事. 事情是这样的：我爱数学，而数学却对我完全是冷酷无情的.

我自信数学的基础知识倒还掌握得不错，但一到需要敏锐的洞察力的时候，她就去另觅新欢，对我不感兴趣.

我对这一点很明白，因为间或我有兴致操起纸笔探究一

些伟大的数学发现，但我所取得的结果迄今只有两种：(1) 完全正确的发现，但却已陈旧过时；(2) 完全是创新的发现，但却是谬误百出.

比如说（就举所得第一种结果的例子来说吧），当我还在很年青的时候，我就发现，连续的奇数之和是连续的平方数，即：1=1，1+3=4，1+3+5=9，1+3+5+7=16，等等. 但不幸的是，毕达哥拉斯（Pythagoras）①早在公元前 500 年就得出了这个结论；我想，某一个巴比伦人早在公元前 1500 年就知道这一点了.

第二种发现的例子可举费尔马（Fermat）末项定理②. 二、三个月以前，我正好在思考这个问题，突然有一丝灵感闯进我的天灵盖，使我豁然开朗. 我能够以极简单的方法来证明费尔马末项定理！

我只消告诉你，整整三个世纪以来，最伟大的数学家们都为费尔马末项定理而绞尽脑汁，他们用越来越复杂的数学工具来验证它，但全都失败了. 你就可以意识到，用一点也不比普通的算术推理更复杂的方法就可以成功地解决这个问题，这对我来说，该是多么无可比拟的天才的灵感啊！

这种得意忘形的胡言乱语倒并没有使我完全看不清这样的事实，即我的证明取决于一条假设，而这条假设是我可以轻而易举地用纸和笔来加以验证的. 我跑上楼，冲进书房，想把这条假设验证一番，并极为仔细地逐步加以推导，使我脑壳里所有的光辉不要受到丝毫不悦的影响.

我可以肯定，你猜对了. 不消几分钟，我的假设就被证明

① 毕达哥拉斯，古希腊伟大哲学家及数学家，生卒年份约为公元前 580～497 年. 译者注.

② 我不拟在此对之进行讨论. 只消这么说，这个问题是现在还不能解答的最著名的数学问题. 原注.

是彻头彻尾荒谬的，费尔马末项定理最后还是没有能证得，当我失望而苦恼地坐到书桌面前时，我的光辉暗淡了下来，成了平常不过的白昼的亮光而已.

然而，在我完全恢复常态之后，我就把刚才的那段插曲以略带满意的心情回顾了一下．不管怎么说，有那么五分钟的时间，我曾以为我马上会被公认为当代世界上最伟大的数学家，在这么一段时间里，不能用言语来表达我的那种感受有多么美妙！

但是，总的说来，我认为正确的、旧的发现（无论多么渺小）毕竟要比新的、错误的发现（无论多么重大）来得好．因此我想把我在前几天刚刚得出的一点小小的发现在你面前炫耀一番，以博你一笑．但我可以肯定，这个发现实际上已经有三百多年的历史了.

不过，我却从来没有在任何地方看到过它．因此，我准备把这项发现称为阿西莫夫级数，除非读者诸君来信告诉我：谁、在什么时候最早指出过这个级数，否则我就将把这个名称沿用下去.

首先，让我把基本思想阐明一下.

我们可以用下式作为开端：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，其中可令 $n$ 为任何整数．我们不妨用几个整数来试一下.

若 $n=1$，则上式变为 $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2$；若 $n=2$，则上式变为 $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$ 或 $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ 或 $\frac{9}{4}$ 等于 2.25；若 $n=3$，则上式变为 $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$ 或 $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ 或 $\frac{64}{27}$，等于 2.3074.

我们可以把一些不同的 $n$ 的值代入上式，制成表 1:

表1　向 $e$ 的趋近

| $n$ | $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ | $n$ | $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 10 | 2.5936 |
| 2 | 2.25 | 20 | 2.6534 |
| 3 | 2.3074 | 50 | 2.6519 |
| 4 | 2.4414 | 100 | 2.7051 |
| 5 | 2.4888 | 200 | 2.7164 |

可以看到，$n$ 的值越大，则 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的值也就越大，然而，随着 $n$ 的增加，该式的值的增加变得越来越慢．当 $n$ 从 1 增加一倍变为 2 时，该式的值增加 0.25 但当 n 从 100 增加一倍到达 200 时，该式的值只增加 0.0113．

该式的连续的值形成一个“收敛级数”，它不断趋近一个确定的极限值．即 $n$ 的值越高，该式的值就越接近某个极限值，但永远不会等于这个数值（更不要说是超过它了）．

已证明当 $n$ 无限递增时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的极限值是一个无穷小数，习惯上用符号 $e$ 来表示．

事有凑巧，$e$ 这个数对于数学家们来说是极为重要的，他们已用计算机对它作了计算，直到小数几千位．写出它的五十位小数也许够了吧？好，让我把 $e$ 的值写在下面：

$$e=2.71828182845904523536028747135266249775724709369995\cdots\cdots$$

你可能会奇怪，数学家们怎样把该式的极限算到小数后而这么多位的呢？即使我们把 $n$ 增加到 200，解出 $\left(1+\frac{1}{200}\right)^{200}$，也只能得出 $e$ 的精确到小数二位的值．我也无法使 $n$ 到达更高的值了，我是用我图书馆里最好的数学用

表——五位对数表来解 $n=200$ 时这个方程的，在这种情况下，对于解出 $n$ 超过 200 时的值，这些对数表是不够精确的．事实上，连我本人对自己所算出的 $n=200$ 时的值也是半信半疑的．

幸而，另有一些可以确定 e 值的方法．试考察下面的级数：

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\cdots$$

就我在上面所给出的几个数来说，这个级数共有六项，其逐项之和为：

$$2= \qquad 2$$

$$2+\frac{1}{2}= \qquad 2.5$$

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}= \qquad 2.6666\cdots\cdots$$

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}= \qquad 2.7083333\cdots\cdots$$

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}= \qquad 2.7166666\cdots\cdots$$

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}= \qquad 2.71805555\cdots\cdots$$

换句话说，用六个数字作一个简单的加法，就可以完全不需要对数表而求出精确到小数后面三位的 $e$ 的值．

如果在上述级数中再加入第七项，然后第八项等等，就可以获得 $e$ 的准确到令人吃惊的更多的小数位数．其实，计算机所获得的 $e$ 的直到小数几十位的值，也是用了上述级数，将级数中的几千项分数相加面得出的．

但如何说出该级数的下一项是怎样的一个分数呢？在一

个有用的数学级数中，应当有某种方法来根据前几项推出每一项．假定某级数就前几项是 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$，那么就可以毫无困难地把以后的各项写出来 $\cdots\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$；同样，如果一个级数的前几项是 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots$，也能够有把握地写出其后的各项：$\cdots\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\cdots$

实际上，一些数学爱好者也经常玩一种有趣的游戏，就是给出一个级数的前几项，然后要你说出它的下一项，这儿有两个简单的例子：

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\cdots\cdots$$

$$2,\ 8,\ 18,\ 32,\ 50\cdots\cdots$$

由于第一个级数是一系列连续的素数，显然下一个数就是 13；而第二个级数则由这样的一些数组成，它们是各连续整数的平方的二倍，故下一项就是 72．

但我们又怎样来对付这样的一个级数

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\cdots$$

它后而的一个数又是什么呢?

如果你知道的话，答案当然是显然的，但如果你过去并不知道，那么你曾否亲自把它找到过呢？而你现在仍不知道的话，你有办法把它找出来吗?

为了说得直截了当些，让我把话题来个大拐弯．

你们都读过多洛锡·塞尔斯（Dorothy Sayers）[①]的小说

① 多洛锡·塞尔斯，英国散文家、剧作家和小说家，公元 1893～1957 年．译者注．

《九个裁缝》吗？我在很多年前曾读过这本书，这是一部谋杀小说，但书中所讲的谋杀、人物、情节以及其他内容我都已忘得一干二净了，只记得其中的一件事，这件事与“打钟游戏”有关．

显然（我是在读那本书的时候慢慢地得出的），在打钟游戏中，我们从一组可以打出不同音调的钟着手，每人拉着其中一口钟的绳子，依次打响这些钟：do，re，mi，fa 等等．接着，大家再以不同的次序来打响这些钟．然后，大家再以另一种不同的次序来打响这些钟，然后，再以又一种不同的次序来打……

可以这么打下去，直到这些钟所可能打出的所有次序（或“变化”）全都打出为止．在打钟的时候，必须遵循一定的规则，比如说，每口钟打的顺次与其在上次打的顺次相比不能超过一个顺次，在各种打法变化中有不同的改变顺次的方法，这些方法本身就是颇有趣的，然而我在这儿所关心的只是与一定数目的钟相联系的所有可能的变化的总数．

让我们用感叹号来作为钟的特号，（!）表示钟舌，这样我们就可以把一口钟写成 1!，把两口钟写成 2!，余者类推．

若钟数为零，则只有一种打法——不打，因此 $0!=1$，钟数为 1（假定有钟的话，则此钟必打），也只有一种打法——“噹”因此 $1!=1$．若钟数为二，即 $a$ 和 $b$，则有两种打法：$ab$ 和 $ba$，故 $2!=2$．

## 教堂的钟

我在正文中用来说明阶乘数的钟在各种文化中都是极为普通的东西，在我们的文化中，与钟关系最密切的是教堂．在现代时计发明之前的日子里，用打钟来向全体居民报告时间，比如通知居民们作祈祷等，是一种普遍使用的办法．1974 年我曾在英国牛津呆

过，一个星期天早上，钟乐开始奏响了，然后就奏个不停，其声音之响简直无法言喻，正如有一次罗伯特·海因莱因 (Robert Heinlein) 说的:“哪一个夜总会要是只发出那怕是它的一半响声的话就会因为公害的罪名而马上被迫停业.”



图 5 教堂的钟

钟还可以在火灾时或敌军进犯时等等作为报警之用. 在雷雨时也经常打钟，企图似此驱散雷电，由于在中世纪的城镇或早期的新式塔楼中，教堂的钟楼往往是最高的建筑物，故它常常为雷电所击，打钟非但不能驱散雷电，相反有许多打钟师被雷电击毙.

至于对打钟游戏来说，我在正文中说到的“九个裁缝”所打出的变化数根本算不上是最多的. 在打钟游戏中可以用到多达十二口钟，用那么多的钟来打出的变化数才能称得上是“最多的”.

事情也许是这样，因为对于十二口钟，除了打出它的一部分的变化外别无他法，把十二口钟中的每一种可能的编排次序全都挨次打到的话，每口钟就将会有 479,001,600 种不同的打法. 打钟游戏“最少的”可由四口钟来做，只需三十秒钟就可以把这组钟的所有变化全都打完，而“最多的”得花上四十年!

打钟游戏与英国的教会关系尤为密切，它原先是一种绅士们的娱乐活动，故《九个裁缝》一书中说到彼得·温姆塞勋爵打响了一口中音钟.

三口钟 $a$、$b$、$c$ 可以有六种打法：$abc$、$acb$、$bac$、$bca$、$cab$ 和 $cba$，此外不能再有别的打法了，故 $3!=6$．四口钟 $a$、$b$、$c$、$d$ 可以有二十四种不同的打法．我不准备在这儿把这些打法全部列出，你可以自己这样开始编排一下：$abcd$、$abdc$、$acbd$ 和 $acdb$，看看还能列出多少种的变化．如果你能列出四个字母的二十五种截然不同的排列次序，你就动摇了数学的整个基础．但我认为你是做不到这点的，总之，$4!=24$．

同样（把我所说的方法再用一下），五口钟可以打出 120 种不同的变化；六口钟可以打出 720 种不同的变化，故 $5!=120$，$6!=720$．

我想你现在已经看出规律来了．如果我们再观察一下给出 $e$ 值的级数：$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\cdots$ 并把它写成：

$$e=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\cdots$$

这样，就可以知道如何得出式中以后的一些分数，它们是：$\cdots\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}$，等等，无穷继续下去．

要得出 $\frac{1}{7!}$，$\frac{1}{8!}$ 和 $\frac{1}{9!}$ 这样一些分数的值，必须知道 $7!$，$8!$ 和 $9!$ 的值，而要知道这些值又必须算出七口、八口和九口一套的钟能够打出不同变化的数目．

当然，如果打算把所有可能的变化都列出并把它们数上一数．怕得化上整整一天的时间；不仅如此，而且还会把你搞得稀里糊涂、头昏脑胀．

因此，让我们来找找看，有没有更为迂回的方法．

我们还是先从四口钟说起，因为钟数再少便不存在什么

问题了．我们首先应该打哪一口钟呢？当然，四口钟中随便哪一口都行，所以我们对于第一口钟就有四种可能的选择，对于这四种选择中的任何一口，都可以选择余下三口钟中的任何一口（即除了已选定为第一口之外的那几口钟）作为第二口钟，因此，对于前面两口钟，就有 4×3 种可能性．我们对于这些选择中的每一种都可以选择余下的两口钟中的任何一口放在第三位，因此对于前面三口钟，就有 4×3×2 种可能性．对于这些可能性中的每一种，只剩下一口钟可以放在第四位．因此对于所有的四种位置，有 4×3×2×1 种排列．

那么，我们就可以说，4!＝4×3×2×1＝24．

如果我们求出任意口数钟的可能的变化，我们将得出同样的结论．比方说，对于七口钟，其变化总数是 7×6×5×4×3×2×1＝5,040．我们可以说，7!＝5,040．

（用于打钟游戏的钟数一般为七口，称为一套“谐音调的钟”．如果每 6 秒钟把所有的七口钟都打上一遍，这样，要把这一套钟的所有变化全部打上一遍即 5,040 遍的话，就得化上八小时另二十四分钟的时间，而且这还是理想的情况，即打的时候还不准出错．所以说打出变化还不是件容易的事哩!）

其实，符号“!”并不真正表示“钟”(这仅仅是我为了引入话题而自已设想出来的一种方法)．在这种情况下，它代表“阶乘”这个词，即 4! 是“四的阶乘”，7! 是“七的阶乘”．

这些数字并不仅仅表示一套钟所能打出的变化，也可以表示若干张纸牌所能洗出的次序，或若干人在桌子边所能排出的座次，等等．

我从来没有见到过关于“阶乘”这个术语的解释，但我可以给它一种在我看来显得颇为合情合理的解释．由于 5,040＝

7×6×5×4×3×2×1，它可以被其中所含的 1 到 7 这七个数中的每一个数整除．换句话说，从 1 到 7 的每个数字都是 5,040 的因子，那么，为什么不能把 5,040 称为“七的阶乘”（七个因子的连乘积）呢[①]？

我们可以推而广之，从 1 到 $n$ 的所有整数都是 $n$！ 的因子，因此为什么不把 $n$！ 叫做“$n$ 的阶乘”呢？

现在，我们可以看到，用级数来决定 $e$ 的值，确是一个很好的方法．

阶乘数的值以极大的速度增加着，从表 2（仅仅只到 15！）就可以清楚地看出这一点．

表 2　阶乘数值

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 8 | 40,320 |
| 1 | 1 | 9 | 362,880 |
| 2 | 2 | 10 | 3,628,800 |
| 3 | 6 | 11 | 39,916,800 |
| 4 | 24 | 12 | 479,001,600 |
| 5 | 120 | 13 | 6,227,020,800 |
| 6 | 720 | 14 | 87,178,291,200 |
| 7 | 5,040 | 15 | 1,307,674,368,000 |

随着阶乘的值迅速增加，以阶乘值为分母的分数值就必然急剧递减．在达到 $\frac{1}{6!}$ 的时候，其值仅为 $\frac{1}{720}$ 而在达到 $\frac{1}{15!}$ 的时候，其值要比一万亿分之一更小得多．

以这些阶乘为分母的分数，每一项都大于该级数其后所

① 英语中“因子”一词为 factor，“阶乘”一词为 factorial，两者从拼法上看来有联系，故作者作此解释．译者注．

有各项之和，即 $\frac{1}{15!}$ 大于 $\frac{1}{16!}+\frac{1}{17!}+\frac{1}{18!}\cdots$ 等等、等等无穷项分数全部加在一起的和．而且随着级数的向后递进，某一项分数在该项与其后所有项分数的总和中所占的比重也在增加．

因此，假定我们把该级数之和一直加到 $\frac{1}{14!}$，其值比该级数实际值少 $\frac{1}{15!}+\frac{1}{16!}+\frac{1}{17!}+\frac{1}{18!}$ 等等、等等．然而，我们可以说，其值比实际值少 $\frac{1}{15!}$，因为该级数的其余各项之和与 $\frac{1}{15!}$ 相比之下是微不足道的，而 $\frac{1}{15!}$ 的值又小于一万亿分之一，换句话说，小于 0.000000000001，故把一打稍多些的分数相加，所得的 $e$ 的值就能精确到小数十一位．

假定我们把该级数的各项相加一直到 $\frac{1}{999!}$（当然是用计算机），如果这么做的话，我们所得的值就比 $e$ 的的实际值少 $\frac{1}{1000!}$，要知道这个数有多大，只须对 1000! 的值有多大有个概念就可以了．可以通过 $1000\times999\times998\cdots$ 等等来把它计算出来，但我奉劝大家切勿尝试，那得花上不知多少时间呢．

幸好，有一些公式可以求得大的阶乘值（至少是近似值），还有一些给出这些大阶乘值的对数表．

可以查得，log1000!＝2,567.6046442，这就是说，1000!＝$4.024\times10^{2567}$ 或（近似地）在 4 的后面跟上 2,567 个零．如果 $e$ 的值被算到 $\frac{1}{999!}$，则其值比实际值只少 $\frac{1}{4\times10^{2567}}$，所获得的 $e$ 的值将精确到小数 2,566 位（我所知道的 $e$ 的最佳值已被计算到小数 60,000 位以上）．

恕我再离题一次，因为我想起我对中等大小的阶乘值曾有过一次切身的应用．那时我在军队，有一个时期，我曾整天同三个病友泡在一起，整日整夜玩桥牌，有一天，一位牌友用拳头狠捶了一下牌桌，打断了牌局，嘴里说道:“我们玩了这么多付牌，我手里又开始抓到同样一付牌了.”真是谢天谢地，因为这么一来，就有了可供我思考的东西了.

桥牌桌上牌的各种次序意味着每人抓到牌的各种不同的可能性，由于牌的张数为 52，故排列的总数共有 52! 种．然而，在每人抓到的某一付的十三张牌总是同一回事，而每人抓到的十二张牌的排列总数共有 13!，且对所有四位牌手来说，这个情祝都是一样的．因此，玩桥牌者手中牌的组合总数等于 52 张牌的排列总数除以那些与次序无关的排列的总数，或者说，等于:

$$\frac{52!}{(13!)^4}$$

我手头没有数学用表，因此只得全部靠笔算来做完这长长的计算．但这并没有使我感到扫兴，因为把自已的时间全部用于自已的爱好，要比用在打桥牌上更使我愉快．我早已遗失了当初得出的答案，但现在我可以借助数学用表来把它再重算一遍.

52! 的数值大约是 $8.066\times10^{67}$，13! 的数值大约是（可从我给出的上述阶乘表内查出）$6.227\times10^{9}$，而该值的四次方约为 $1.5\times10^{39}$．若将 $8.066\times10^{67}$ 除以 $1.5\times10^{39}$ 得出可能的不同牌局的总数约为 $5.4\times10^{28}$ 或 54,000,000,000,000,000,000,000,000,000 或 5,400 亿亿亿局.

我把这个结果对牌友们说了，我说:“看来我们是不会再次碰到已经打过的那局牌的，如果每秒钟玩一万亿盘牌，那么连玩十亿年也不会碰到一盘重复的牌.”

但是我得到的报应是遭到了彻头彻尾的怀疑．那位起先抱怨的朋友很和气地对我说：“但是朋友，你知道，牌只有 52 张啊！”说着就把我领到军营里的一个僻静的角落，要我在那里冷静一会儿．

实际上，用来决定 $e$ 的值的级数仅仅是某一般情况的一个特例．可以表示为：

$$e^x=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\cdots$$

由于对任何的 $x$ 值来说，都有 $x^0=1$，且 0！与 1！均等于 1，故通常把上述级数的开头表示为：$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$，但我还是喜欢我在上面给出的那种表达式，它比较对称和美观．

现在，可以将 $e$ 本身表示为 $e^1$，这时，一般级数中的 $x$ 变为 1．由于 1 的任何次幂均为 1，故 $x^2$、$x^3$、$x^4$ 以及 $x$ 的全部其余次幂均为 1，级数就变成：

$$e^1=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots\cdots$$

它就是我刚才所研究过的级数．

现在我们来考察 $e$ 的倒数，即 $\frac{1}{e}$，其数值的小数十五位为：0.367879441171442……

## 纸　　牌

由于阶乘数目的迅速增加，故有可能只用五十二张纸牌来玩无数（说“无数”，是相对于有限的人生而言的）盘的牌．

其实，唯一的另一种普通的纸牌游戏是“匹诺克尔 (pinochle)”，它是用两付牌来打的，每付牌中只取出各种花色的 A、K，Q、J、10 和 9 六张牌，六八四十八，共计只有四十八张牌，这样，阶乘的数

目自然要少得多，况且由于两付牌花色的重复，更减少了可能的不同组合数，这意味着在打匹诺克尔时可能出现的不同的组合数只有平常纸牌游戏中可能的不同组合数的1/312,000,000，即使这样，这个相对较少的数目仍足以保证人们在玩匹诺克尔时不必担心碰到重复的牌局.



图 6 纸牌

纸牌游戏今天在世界上流传得如此普遍，但不知为什么，人们总有这么一种想法，觉得它一定是一种古老的、甚至是一种史前的娱乐．可是事实并非如此，它是中世纪时发明的，可能起源于远东，在十二世纪中传入欧洲．也许是马可孛罗（Marco Polo）①或是吉卜赛②人，或是阿拉伯远征者带至西方，但事实究竟如何，恐怕没有人能说确切了．

更奇怪的是，今天我们认为是理所当然的纸牌的两个特点，看来是近来的变化，一个特点是在纸牌的左上角和右下角画上小的标记，这样只须露出牌的一角就可以认出这张牌来，如上图．另一个特点是上下的中心对称，这样无论怎样来拿一张牌，它的右边总是向上的．如果没有这些变化，在打牌的时候将会觉得极为不便．

在纸牌被用作机遇游戏之前，间或也用它来算命即打“塔洛脱”（tarot）”牌．

由于$\frac{1}{e}$可以写成 $e^{-1}$，这意味着在 $e^{x}$ 的一般公式中，可用－1 来代替 $x$.

① 马可孛罗，意大利旅行家，曾远游东方，公元 1254? ～1324 年．译者注．

② 吉卜赛人，原为西亚一流浪民族．现散居亚、非、欧、美洲各地．译者注．

对$-1$的幂来说，其答案是，$-1$的偶次幂等于$+1$，其奇次幂为$-1$．即：$(-1)^0=1$，$(-1)^1=-1$，$(-1)^2=+1$，$(-1)^3=-1$，$(-1)^4=+1$等等，余类推．

如果在一般的级数中令$x=-1$，则：

$$e^{-1}=\frac{(-1)^0}{0!}+\frac{(-1)^1}{1!}+\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\frac{(-1)^4}{4!}\cdots$$

或 $$e^{-1}=\frac{1}{0!}+\frac{(-1)}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{(-1)}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{(-1)}{5!}\cdots$$

或 $$e^{-1}=\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}\cdots$$

换言之，即$\frac{1}{e}$的级数与$e$的级数十分相象，只有所有的偶数项从加号改变为减号而已．

进而，由于$\frac{1}{0!}$与$\frac{1}{1!}$均等于1，则$\frac{1}{e}$级数的前二项：$\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}$相当于$1-1=0$，故可将它们略去不写，我们可以得出：

$$e^{-1}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}-\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}\cdots$$

等等，余类推．

最后，让我们回头来谈谈我个人的发现吧！当查看我刚才给出的 $e^{-1}$ 的级数时，我不禁想到加号和减号的交替出现是美中不足．能不能找出一种方法，使之表达成只带加号或只带减号呢？

由于象 $-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$ 这样的式子可改写成 $-\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)$，所以我看可以把上式改写成下列级数：

$$e^{-1}=\frac{1}{2!}-\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)-\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}\right)-\left(\frac{1}{7!}-\frac{1}{8!}\right)\cdots \text{等等}.$$

现在我们就只有减号了，但也出现了括号，这又是一种有碍美观的东西．

因此我对括号里的内容进行了考虑．第一个括号内包括两项：$\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}$，它等于 $\frac{1}{3\times2\times1}-\frac{1}{4\times3\times2\times1}$，即等于 $\frac{4-1}{4\times3\times2\times1}$ 或 $\frac{3}{4!}$，同样可得 $\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}=\frac{5}{6!}$； $\frac{1}{7!}-\frac{1}{8!}=\frac{7}{8!}$ 等等．

我感到惊异万分，又高兴得难以形容，因为现在我得到了阿西莫夫级数，那就是：

$$e^{-1}=\frac{1}{2!}-\frac{3}{4!}-\frac{5}{6!}-\frac{7}{8!}-\frac{8}{10!}\cdots \text{等等，直至无穷}.$$

我敢肯定说，这个级数对于任何真正的数学家来说都是一目了然的；我也相信，这个级数在正式文章中描述已有三百年了，但我却从来没有见到过这个级数．因此，我打算把它称作阿西莫夫级数，直到有谁站出来阻止我为止．

阿西莫夫级数不仅只含有减号（除了在第一项前面有一个未写出来的正号外），而且依次包括着所有的数字，你再也找不出比它更美的式子了．现在让我们把这个级数的前几项

算出来，以作本文的结束吧：

$$\frac{1}{2!} = 0.5$$

$$\frac{1}{2!} - \frac{3}{4!} = 0.375$$

$$\frac{1}{2!} - \frac{3}{4!} - \frac{5}{6!} = 0.3680555\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2!} - \frac{3}{4!} - \frac{5}{6!} - \frac{7}{8!} = 0.3678819\cdots\cdots$$

可见，只消把这个级数的前四项相加，便可以得到一个仅比其精确值达 0.0000025 的答数，其误差比 150,000 分之一稍大一些，大约为 $\frac{1}{1500}\%$.

因此，假定你认为标题的“感叹号”仅仅指阶乘符号的话，你就错了．它甚至更能表达我对阿西莫夫级数的乐趣和惊奇．

又及．为了把阿西莫夫级数中未表示出来的那个正号除去，一位读者（在本章初版后）建议将该级数写成 $-\frac{(-1)}{0!} - \frac{1}{2!} - \frac{3}{4!}\cdots$，则所有各项将全部为负，即使第一项也不例外．不过，如果照此办理，就不得不把自然数的领域进行扩展，使之包括 0 和 $-1$，而这将对级数的朴素美略有损害．

另一条建议是用 $\frac{0}{1!} + \frac{2}{3!} + \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} + \frac{8}{9!}\cdots\cdots$ 来表示 $\frac{1}{e}$，使它只含有正号，它看上去比负号更美观些（在我看来），但从另一方面来说，它也包括了 0．

还有一位读者提出了一条与 $e$ 本身相似的级数，这条级数是这样的：$\frac{2}{1!} + \frac{4}{3!} + \frac{6}{5!} + \frac{8}{7!} + \frac{10}{9!}\cdots\cdots$，但这样做就把

自然数的次序颠倒过来了，也由于它的次序略显凌乱而稍为逊色，但它却给级数以某种美的感觉，是吗?

唉，要是数学也象我爱她那样钟情于我，该有多好啊!

## 4 T 形 数

有人指责我，说我对于大数有一种狂热，这倒一点也不假．我不想否认这种癖好，不过，我能不能说一下，我并不是唯一喜爱大数的人呢?

举个例吧，在一本题为《数学和想象》(1940 年出版) 的书中，作者爱德华·卡斯纳 (Edward Kasner) 和詹姆士·纽曼 (James Newman) 引入了一个名叫“googol”的大数，这个数既大且好，很快就被著书撰文者采用在数学普及文章中．

就本人而言，我并不喜欢这个糟糕的名字，但这是一位作家的小孩发明出来的，你想那位骄傲的父亲会不为此高兴吗?因此，我们就不得不永远为这种儿语般的数字而受苦了．

googol 是这样的一个数，即在 1 这个数字后而跟上一百个零．现在我把 googol 这个数完整地写出来 (要不是我数错了零的个数，或者印我文章的诺贝尔印刷厂干了蠢事，那就一定错不了)：

10,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,
000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,
000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,
000.

显然，用这样的方法来写出一个 googol 是够笨的了，但对我们以 10 为基数的数制却是适用的，在十进制中，要写出

大数，我们只要乘上 10. 因而，一百就是十乘十，并写成 100，而一千则是十乘十乘十，并写成 1000，等等. 数中的零的个数等于乘上十的个数. 那么，1 后面跟上一百个零，即 googol，就相当于一百个十乘在一起. 这也可以写成 $10^{100}$，由于 100 是十乘十或 $10^2$，故 googol 又可以写成 $10^{10^2}$.

当然，这种指数形式的记法（其右上角的小数字即是“指数”）是相当方便的，随便哪一本数学普及读物都会把googol 写成 $10^{100}$. 然而，对于任何喜欢大数的人来说，googol还只是大数的开头，即使这种大数的简短写法还是不够简便的[①].

因此，我为记写大数制定了自己的一套系统，我打算利用这一章作为介绍这种记法的机会（请不要走，在我讲完之前，请谁也别离开!）.

在我看来，麻烦在于我们是用 10 这个数字来构成大数的. 我觉得，对于穴居的原始人来说，这是够大的，但我们现代人已经复杂得惊人，我们知道很多比它更好的数字.

比如，目前美利坚合众国的预算大约是每年 100,000,000,000 美元（一千亿美元）左右，就是说，1,000,000,000,000 银角子（一万亿）[②].

那么，我们为什么不把一万亿这个数字作为基数呢？当然，我们不能想象出一万亿是多大的一个数目，但为什么就止步不前了呢？就是 53 这么个数目，我们也是无法想象出来的，举例说，要是有人把一堆东西放在我们面前，说它们总

---

① 用美国术语来说，googol 的确切意思是一万亿亿亿亿亿亿亿亿亿亿亿. 但十分遗憾，我敢说，这个名字永远也不能取代 googol. 原注.

② 本文初版于 1963 年八月，此后美国预算增加了三倍，超过了三万亿银角子. 我们不是倒霉了吗？这里顺便提一句，本书所加的附注放在括号内，以示与初版时所列数字的区别. 原注.

共有五十三个，如果不数一下的话，我们就说不出他所说的数目是对还是错．这就使一万亿并不比五十三来得更不现实，因为我们对这两个数都不得不数上一番，而两者又同样是可以计数的．当然，要把一万亿数一下，那得花上比数一下五十三多得多的时间，但计数的原则是一样的，而我是（也许有人会告诉你）一个讲原则的人．

重要的是把一个数目同一些可以把握得住的物体联系起来，这一点我们也已经做了．1,000,000,000,000 这个数目大约同善良快活的山姆大叔每年从你我口袋中掏走（我有时颇带怨气地认为，大部分是从我的口袋里掏去的）用于建造导弹和治理政府、国家的银角子的数目相等．

然后，一旦我们在头脑里牢固地建立了一万亿是多大一个数目，那么只要略加想象就可以知道一万亿个一万亿是怎样一个数目，一万亿个一万亿个一万亿是怎样一个数目，等等．为了使我们在说这么一些一万亿的时候不致结结巴巴，可以使用一个简明的方法，就目前所知，这个方法还是我首创的呢[①]．

让我们把一万亿称为 T-1，一万亿个一万亿称为 T-2，一万亿个一万亿个一万亿称为 T-3，用这个办法来构成一些大数（即标题的“T 形数”．当然，你不会以为是足球队的 T 形队形吧？）．

我们不妨看一下如何使用这些数字吧．我刚才说过，T-1 即用于治理美国一年的银角子数，那么，T-2 就表示治理美国一万亿年所用的银角子数．由于这段时间无疑要比美国所

---

① 其实，阿基米德曾建立过一个以一万为基数的数制，并使用一万万、一万万万等说法．但一万只有 10,000，而我所用的是 1,000,000,000,000，因此我不认为阿基米德对我的创造有什么影响，此外他只不过比我早了不到二十二个世纪．原注．

能存在的年数来得长得多（如果允许我用这个不大爱国的说法），而且很可能要比地球这个行星所能存在的时间要长．可见，用阿西莫夫的 T 进数的话，根本用不到 T-2．就早已把财政方面的应用全都包括进去了．

不妨再试试其他的应用，任何物体的质量与其所含有的质子和中子数成正比，这两种粒子可以统称为核子．T-1 个核子所构成的质量是极小的，即使用最好的光学显微镜也远远看不到，而 T-2 个核子也只能构成$1\frac{2}{3}$克重或$\frac{1}{16}$英两重的物质．

现在我们似乎有机会把 T 数尺的刻度往上移动了．比如，T-3 个核子的质量到底有多大？由于 T-3 是 T-2 的一万亿倍，T-3 个核子就能构成重 1.67 万亿克的物质，或者略少于两百万吨．也许它并不比我们所想象的来得更多些．

事实上，T 形数的增加速度叫我们吃惊．T-4 个核子相当于地球上所有海洋的质量，T-5 个核子相当于一千个太阳系的质量．如果你硬要继续增加上去，T-6 个核子就相当于一万个我们银河系这样大小的质量，T-7 个核子的质量要远远地、远远地超过整个已知宇宙的质量．

当然，核子并非原子中唯一的亚原子粒子，但即使我们把电子、介子、中微子以及所有其他亚原子结构的粒子全部放进去，我们还是到不了 T-7．总之，在可见的宇宙中各种亚原子粒子的总数仍然远远少于 T-7．

很明显，T 进数制是表示大数的一种强有力的方法．那末，它又怎样构成 googol 的呢？好，让我们考虑一下普通带指数的数与 T 进数的相互换算的方法，T-1 等于一万亿或$10^{12}$，T-2 等于一万亿个一万亿或$10^{24}$，余类推．这样，你只

要把指数除以 12 就得到 T 进数的数字部分；只要把 T 进数的数字部分乘上 12 就可以得到十进数的指数.

如果一个 googol 为 $10^{100}$，将 100 除以 12，就马上可以看到，它可以被表达为 $T-8\frac{1}{2}$，注意：$T-8\frac{1}{2}$ 比 T-7 大，而 T-7 已经比已知宇宙中所有亚原子粒子的数目还要大. 因此要十万个万亿个象我们宇宙那样大的宇宙方能具有一个 googol 的亚原子粒子数.

看来，googol 这个数甚至对用于计数布满最大的已知空间的最小的物质颗粒来说都显得太大，那么，这样大的一个数到底有什么用处呢?

我可以回答说，其好处就在于其本身纯粹的、抽象的美.

可能你们也要向我扔石子. 然而且慢，让我说清楚，在这个宇宙里正有比物质颗粒数量大得多的东西要计数呢.

比如，只要考虑一付普通的扑克牌. 在玩牌时，我们得洗牌，使牌按某种次序来排列，这样就可以玩一局牌. 一付牌可以洗出多少种不同的排列次序呢?（由于在一付已洗过的牌中基本不同的牌局数不可能多于牌的排列次序数，这个问题可能会使你友好的牌友们感到兴趣）.

答案很容易得出（参见第 3 章），它大约是 80,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000 或 $8\times10^{67}$. 在 T 进数中，它大约是 $T-5\frac{2}{3}$，只要一付普通的牌，其可能计数的排列数差不多可达到一个银河系中的亚原子粒子的数目.

如果不用 52 张牌，而用 70 张牌来玩——这并非不近情理，我知道有一种叫卡那斯塔（canasta）的纸牌就得使用 108

张牌，那么洗牌后可以得到的不同排列次序的数目就超过 googol 这个数.

因此，在分析纸牌游戏时（更不用说下棋、经济和核战争了），就可以遇到与 googol 一样大或甚至更大的数目.

事实上，数学家对许多不同种类的数字（具有或不具有实际应用价值均可）感到兴趣，在数学中远远超过 googol 的巨大数字可以很快地达到.

比如，考虑一下中世纪最有才华的数学家莱昂纳多·斐波那契（Leonardo Fibonacci，他生于比萨，故常被称为比萨的莱昂纳多），大约 1200 年的时候，斐波那契正值壮年，比萨是一个繁华的商业城市，与北非的摩尔人在商业上有来往，斐波那契就有机会访问那个地区，并从摩尔人的教育中得益非浅.

那时，穆斯林世界已从印度人那里学到了一种新的数制.而其时欧洲人却仍然为原始的罗马数字（参见第 1 章）所苦.斐波那契学到了这种新的数制，并在 1202 年出版的一本叫《算盘书》的书中引进了这些"阿拉伯数字"并将其传入欧洲.由于阿拉伯数字比罗马数字有用何止千万倍，因此，只用了一、二个世纪，就使欧洲商人们信服地改了过来.

就在这本书里，斐波那契还提出了下面的问题："有小兔一对，若第二个月它们成年，第三个月生下小兔一对，以后每月生产小兔一对，而所生小兔亦在第二个月成年，第三个月生产另一对小兔，此后亦每月生产小兔一对，问一年后共有兔几对？"（设每产一对兔必为一雌一雄，而所有兔子都可以相互交配，且无死亡.）

在第一个月，有一对未成年的兔；第二个月时兔数仍为一对，但此时兔已成年；到了第三个月它们生下一对小兔，因此

共有兔二对，一对成年，一对未成年，到了第四个月，第一对兔又生下小兔一对，第二对兔成年，因此共有兔三对，二对成年，一对未成年．

如果愿意的话，你可以继续下去，推算出每个月共有几对兔子．但我可以马上给你写出兔子对数的级数，省却你的麻烦，它是：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144

你可以看到，到了年底，兔子的对数就达到了 144 对，这就是斐波那契问题的解．

这个问题中的兔子对数的级数称为“斐波那契级数”，级数中的每个数称为“斐波那契数”，如果你查看一下级数，你将看到每个数（从第三个数开始）都是它前面二项之和．

这就是说，我们不必在斐波那契数的第十二项（$F_{12}$）就中止级数，只须将 $F_{11}$ 和 $F_{12}$ 相加，就可以很容易地得到 $F_{13}$，由于 89 加 144 等于 233，故 $F_{13}$ 等于 233．将 144 和 233 相加将到 377 即 $F_{14}$．按此办法，我们可以继续得到 $F_{15}$ 等于 610、$F_{16}$ 等于 987 等等，你愿意加到那一项就可以加到那一项．只须简单的加法，不必其他的运算，就可以得出你所需要的所有斐波那契数．

当然，稍后，随着斐波那契数逐渐变长，数位越来越多，加法中发生错误的机会也增加了．只要在级数中的任意一项发生一个加法错误，如未加纠正，则其后各项就将全部报废．

但是，为什么要把斐波那契级数一直算下去，算下去，直到得出大数呢？原来，这个级数有它的用处．它与累计生长有关，许多在实际中发生的事情就象兔子问题那样，沿树枝螺旋前伸的树叶分布，松果上的鳞片分布以及向日葵花盘上葵花籽从中心向外的分布，其排列情况都与斐波那契级数有关，

该级数亦与“黄金分割”有关，而“黄金分割”对艺术和美学来说就同对数学一样重要.

但除了这些之外，的确往往有一些人对大数感兴趣（我无法解释这种癖好，但请相信，确有这样的人）. 如果日日夜夜用笔和墨水来算还不能过瘾的话，我们今天已经可能让计算机来做这样的工作，只需给它编写一个程序即可. 这样，用过去的老办法企图得出大数已经是不切实际的了.

1962 年十月号的《数学趣味杂志》[①]上首次发表了斐波那契数的第 551 项，是用IBM 7090 计算机算出来的. 斐波那契数的第 55 项已经超过了一万亿，所以可以说，$F_{55}$ 大于T-1.

从这儿开始，斐波那契数大致每隔 55 项（其间隔缓慢地延长着）就超过下一个 T 进数. 事实上，$F_{481}$ 就已经大于一个 googol 了，它实际上等于一个半 googol.

换句话说，那些不断繁殖着的兔子将很快地超过任何可能设想到的促进它们繁殖的计划，它们很快就将使可能想象得到的所有的饲料变得供不应求，所有可以想象得到的饲养场地将变得拥挤不堪. 到第一年年底时还只有 144 对兔子，到第二年年底就变成将近 50,000 对，而到了第三年年底则变成了 15,000,000 对，等等. 到了第二十年年底，兔子的总数就将比我们已知的宇宙中所有的亚原子粒子数还要多，而到四十年后，兔子的总数就超过了一个 googol.

当然，人类的增长速度没有象斐波那契的兔子那么快，而且老人都要死去. 然而，原理却是一样的. 那些兔子在几年内能够增长到的数目，人类在几个世纪或几千年也能达到. 这就够了. 考虑到这些，就应把人口的激增控制在最低限度.

---

① 这是一本有趣的小期刊. 我诚心地向所有同我一样的热心数学者推荐这本杂志. 原注.

## 莱昂纳多·斐波那契

莱昂纳多·斐波那契约 1170 年生于比萨，死于约 1230 年．正如我在正文中所说的，他的最大成就是在他的著作《算盘书》中普及了阿拉伯数字．虽然英国学者巴塞的阿德拉（Adelard）——亨利（Hanry）二世登基前的太傅——比他早一个世纪就介绍了阿拉伯数字，但斐波那契的书却留下了深刻的印象．



图 7 斐波那契象

但他为什么把该书称为《算盘书》或算盘之书呢？说来奇怪，因为阿拉伯数字的使用源出于"算盘"，这是一种早在巴比伦时代和有史之初就出现的计算工具．

最简单的算盘可以很容易地想象成由一排排铁丝组成，每条铁丝上串着十个算珠，铁丝上还留有余隙，可把一个或几个算珠左右拨动．

如果想把五和四相加，可先向左拨动五个算珠，然后再向左拨动四个，接着便数一下你所拨动的算珠是九个．如果想把五和八相加，可先拨动五个算珠，但余下的算珠只有五个而不是八个，因此就拨动五个算珠，并在上面一排拨动一个算珠．上排算珠是"十位数"，然后拨动余下的三个，这样就得到一个十和一个三，总数就是十三．

各条铁丝分别依次表示个、十、百、千等等，阿拉伯数字实质上就是每条铁丝上所拨动的算珠数，算盘上的操作即是阿拉伯数字所要求的运算，只需再为不拨动算珠的铁丝制定出一种符号，即

零（0），阿拉伯数字就能用于商业了.

我想把$F_{571}$写出来以供消遣，这是本章所写的最大数字（当然，后面还会有更大的数字出现，但我不准备把它们写出来了!），不管怎样写，它总是：96041200618922553823952883360924865026104917411877067816822264789029014378308478864192589084185254331637646183008074629，但这么大的一个数还达不到T-10呢[①].

另一个大数的例子是素数．素数是象 7 或 641 或 5,237 这样的一些数，它们只能被它们自已和 1 整除，此外别无其他因子，你可以假设，随着数字变得越来越大，素数也逐渐变得越来越少，因为用作可能因子的较小的数变得越来越多了.

然而，却不会出现使素数消失的情况，甚至古代希腊人就知道这一点了，欧几里得（Euclid）已经能够十分简单地证明，如果把一个“最大的素数”以下的全部素数列出，那末总可以构成一个更大的数，它或者本身是一个素数，或者具有一个比那个“最大的素数”更大的素因子．因此，想找到一个“最大的素数”是根本不可能的，素数的数目是无限的.

即使我们不能算出一个最大的素数，也有一个可算是同出一源的问题，即我们已知的最大素数是什么？也许可以轻松地指着一个大数说：“这是一个素数，有无数个比它大的素数，但我们并不知道它们是什么数，这是我们所知道的最大一个素数.”

这么一说，你就可以想到，可能会有一些爱冒险的业余数

① 本文发表以后，《数学趣味杂志》编辑曾来信说，已找到新的斐波那契数，达到$F_{1000}$，它有 209 位数字，约比 T-17 还大．[上述脚注首次发表至今已有十一年，但我尚未听到任何新的消息．我确信已得出了新的斐波那契数，但是每件事情都得跟上那是困难的呀！新情况不断在出现着.] 原注.

学爱好者去发现一个比之更大的素数.

但找到一个真正的大的素数可不是件容易的事. 比方说，我在上面说过，5,237 是个素数. 假定说，你对它有疑问，那末你用什么办法来检验呢？唯一的可行的办法是用所有小于6,237 的平方根的素数来作检验，找一下它是否有因子，如有的话，哪些是因子. 这是件令人乏味的事，但对 5,237 来说是可能的. 不过对真正的大数，除非用计算机，否则这个办法是极不切实际的.

因此，数学家们便开始寻找可以用来构成素数的公式，它也许不能把书本中的每一个素数都给出，以致它不能用来检验某一已知数是否为素数. 然而，它可以构成任意大小的素数，自此以后，发现一个破记录的素数的工作将变得毫无意义，并可能从此被抛弃.

但是，这样的公式却一直未找到. 直到 1600 年，一位名叫马林 · 默森（Marin Mersenne）的法国男修道士提出了一个有时可能但并非总是可以得出素数的部分值公式，这个公式是 $2^p$-1，其中，$p$ 本身是一个素数（我希望你能懂得，$2^p$ 是表示 $p$ 个 2 的乘积，因此 $2^8$ 是 2×2×2×2×2×2×2×2 或256）.

默森提出，该公式在 $p$ 等于 2，3，5，7，13，17，19，31，67，127 或 257 时能得出素数. 对于较小的数，这个公式可以轻易证得. 比方说，$p$ 等于 3，则公式变为 $2^3$-1 或 7，它确是个素数. 如果 $p$ 等于 7，则 $2^7$-1 等于 127，它也是一个素数. 你可以用你想用的任何别的 $p$ 值来验证这个方程.

在默森的方程中，由代入 $p$ 而获得的数字称为“默森数”，如果这个数字凑巧是素数的话，那就称为“默森素数”，用大写字母 M 和 $p$ 的值作记号来表示，这样，$M_3$ 等于 7，$M_7$ 等于

127 等等.

我不知道默森用什么系统来确定那些素数可以从他的方程中得出默森素数，但无论这个系统是什么，它肯定是错的. 默森数 $M_2$，$M_3$，$M_5$，$M_7$，$M_{13}$，$M_{17}$，$M_{19}$，$M_{31}$ 和 $M_{127}$ 确是素数，因此默森已屈指数出了不少于九个默森素数. 然而，默森曾说 $M_{67}$ 和 $M_{257}$ 是素数，但经过极为繁重艰苦的检验，却证明它们并非素数；另一方面，默森并未列入素数的 $M_{61}$，$M_{89}$，$M_{107}$ 却是素数，这就使默森素数的总数共达十二个.

近年来，感谢计算机的劳动，又得出了八个默森素数（根据 1962 年四月号《数学趣味杂志》）. 它们是 $M_{521}$，$M_{607}$，$M_{1279}$，$M_{2203}$，$M_{2281}$，$M_{3217}$，$M_{4253}$，和 $M_{4423}$. 继那期发表的八个默森素数之后，伊里诺斯（Illinois）大学的唐诺尔德 · 吉里斯（Donald B. Gillies）又找出了三个更大的默森素数，它们是 $M_{9689}$，$M_{9941}$ 和 $M_{11213}$.

这些最新发现的默森素数中最小的一个是 $M_{521}$，是通过公式 $2^{521}$-1 来计算出的. 把 521 个 2 相乘再减去 1，其积远远要比 googol 来得大，实际上，它甚至大于 T-13.

毋用置疑，最大的已知默森素数是$M_{11213}$. 我相信，这个目前已知最大的素数有 3375 个数位，因此大约是 $T-281\frac{1}{4}$①. 与这样的数相比，一个googol就显得如此渺小，甚至没有适当的办法来形容它的渺小的程度.

希腊人曾对数字作过许多游戏，其中之一是把一些特殊整数的因子相加. 比如，12 的因子是 1，2，3，4 和 6（不计该数本身）. 所有这些数字中的每一个都可以整除 12，这些

① 据 1979 年报道. 美国的计算机专家哈里 · 内尔森和戴维 · 斯洛文斯基得出了目前最大素数 $M_{44497}$，它有 13395 位数. 译者注.

因子的总和是 16，大于 12 本身，因此把 12 称作为“过剩数”.

另一方面，10 的因子是 1，2 和 5，其和为 8，它比该数本身要小，因此 10 是一个“亏数”（很明显，所有的素数都是极亏的）.

但可以考虑 6，其因子是 1，2 和 3，其和为 6．当因子相加能得到该数本身时，称该数为“完全数”.

### 马林・默森

马林・默森于 1588 年九月八日出生于法国的洼翟（Oizé）镇附近，他与大数学家勒奈・笛卡儿①（René Descartes）曾同校学习．鉴于笛卡儿因某种原因加入了他极不适应的军队，默森也进了教会，于 1611 年入小修道院，他是科学的热心拥护者，在教会中为了保卫科学事业做了很多工作．他捍卫笛卡儿的哲学思想，反对来自教会的批评；也翻译过伽里略（Galileo）②的一些著作，并捍卫了他的理论.



图 8 默森象

默森对科学所作的主要贡献是他起了一个极不平常的思想通道作用．十七世纪时，科学刊物和国际会议等还远远没有出现，甚至连科学研究机构都没有创立，默森成了欧洲科学家之间的联系的桥梁．他写了成卷的书信，寄发到远至君士坦丁堡（Constantinople）这样的地区，向一位通信者报告另一位的研究工作，向他提供建议，而这些建议来自他对许多人的研究工作的了解，并不断地策动别人参加

① 笛卡儿，法国哲学、数学家．公元 1596～1650 年．译者注.

② 伽里略，意大利物理、天文学家．公元 1564～1642 年．译者注.

这种丰富多彩的相互通信活动.

他反对玄秘的学说，如星相术、炼金术和占卜术；他大力支持实验．他信仰实验的一个实例是，他曾向克里斯琴·惠更斯（Christian Huygens）[1]建议用单摆来作为时计以测量物体沿斜面滚下所需时间．单摆原理是伽里略首先提出的，但伽里略并没有想到用它作为时计，而是利用底部开孔的桶中落下的水滴作为时计来测量物体滚下所需的时间．惠更斯采用了这个建议，结果发明了钟摆式时计，这就成了对科学很有用的第一台时计.

默森于 1648 年九月一日死于巴黎.

二千年以来，对完全数的研究毫无建树，但希腊人受到这些数的迷惑，其中有些人在心灵上崇拜完全数．比如，他们可以论证（希腊文化一度曾渗透犹太基督教）说，上帝是在六天内创造了世界的，因为六是一个完全数（其因子是最前面的三个数 1，2，3，它们不仅和为 6 而且积也是 6，可以料想，上帝是不可能反对这一切的）.

我不知这些神秘主义者曾否对这样的事实也立过论，即阴历一个月恰好也是 28 天稍多一点，而由于 28 的因数为 1，2，4，7 和 14，其和为 28，所以它也是另一个完全数．可惜，阴历一个月的确实天数是 $29\frac{1}{2}$ 天，神秘主义着们也许对造物主的这种随便安排感到迷惑不解.

但这种奇妙的完全数到底有多少呢？试想一想在我们数到 28 的时候就已经碰到了二个．也许你会觉得它们为数不会少吧．事实上，这种数是不多的，比人们所熟知的其他任何一种数都要少得多．第三个完全数是 496，第四个是 8,128，而整个古代和中世纪，所知道的完全数就只有这么四个.

---

① 惠更斯，荷兰数学、物理、天文学家．公元 1629～1675 年．译者注.

第五个完全数直到 1460 年前后方被人发现（发现者姓名不详），它是 33,550,336．到了现代，感谢计算机的帮助，发现了越来越多的完全数，其总数目前有 20 个．第 20 个，也是最大的一个完全数有 2663 个数位，这差不多等于T-222[①]．

但从某种角度上来说，我对凯思纳和纽曼倒是有点不太公正的．我说过，他们发明了 googol 这个数，接着我又指出，很容易举出比 googol 大得多的数来．然而，我也应当补充说，他们已发明了另一个数，它要比 googol 大不知多少，这个数称为“googolplex”，规定它等于 $10^{\text{googol}}$，其指数即为 1 后面跟上一百个零，我可以把它写出来，但是我不打算这样做．我可以这么说，一个 googolplex 可以写成：

$$10^{10^{100}} \quad \text{或} \quad 10^{10^{10^2}}$$

googol 的本身并不是很难写出来的，在本文开头我已经这么做了，它只有几行长，即使在本文前面提到过的那个最大的数也可以不太困难地写出来．最大的默森素数，如果把它全部写出来所占的篇幅也不到本书的二页．

然而 googolplex 却是无法写出来的，简直是不可能！它等于 1 后面跟上 googol 个零，而这本书无论如何也写不下 googol 个零，不管在常情范围内这些零印得多么小．说实在的，如果你能把每个零写到不大于一个原子那么大，就是整个地球的表面也写不下这个数．实际上，如果你以每个核子来代表一个零的话，那么在整个已知宇宙中，或者说在一万亿个象我们这个宇宙这么大的宇宙中，全部的核子个数还不够给你拿来当零．

这样，你可知道，googolplex 这个数比我已提到过的随便哪个数都大到无可比拟的程度，然而用我的 T 进数却可以毫

---

① 目前已知的最大完全数是 $2^{44496} \times (2^{44496}-1)$．译者注．

无麻烦地把它表达出来.

请想一下，T 进数通过 T-1，T-2，T-3 等等数字而逐渐增大，直到达到 T-1,000,000,000,000.（这个数等于“一万亿个一万亿个一万亿个一万亿……”，一直继续下去，直到你把万亿这个词说上一万亿次，你得活上无数辈子的时间方能说得完，但是原则仍然永存）. 由于我们决定让一万亿记为 T-1，故 T-1,000,000,000,000 这个数字可以写成 T-（T-1）.

记住，必须把 T 进数的数字部分乘以 12 才能得到十为底数的指数，故 T-（T-1）等于 $10^{12,000,000,000,000}$，它大于$10^{10^{13}}$.

同样，我们可以算出，T-（T-2）大于$10^{10^{25}}$，如果我们继续下去，最后可以得到，T-（T-8）差不多等于一个 googolplex，而 T-（T-9）则比 googolplex 还要大得多呢，事实上，它要比 googol 个 googolplex 还要大.

再说一、二句话：我就结束这一章了.

在菲立浦 · J. 戴维斯（Philip J. Davis）所著的一本名叫《大数博闻》的书中，给出了一个叫做“斯凯沃斯 (Skewes) 数”，这个数是一位南非数学家 S · 斯凯沃斯（S. Skewes）得出的，他在推导一条有关素数的复杂定理时，在这个数上犯了个错误. 这个数被描写成“在一道数学证明题中出现的，被认为是最大的一个数”，它是：

$$10^{10^{34}}$$

由于googolplex仅仅只有$10^{10^{2}}$，斯凯沃斯数要比它大到无法比较的程度①.

那么，斯凯沃斯数又如何写成 T 进数的形式呢？

但是，现在甚至我自己也打算打退堂鼓了，我不准备做这件事了.

① 此处$10^{10^{34}}$ 系 $10^{10^{10^{34}}}$ 之误；$10^{10^{2}}$ 系$10^{10^{10^{2}}}$ 之误. 译者注.

我想把这件事留给你去做．哦，亲爱的读者！我还得告诉你一点，不止是作一个暗示，在我看来，它显然要比T-[T-(T-1)]来得大．

从现在起，路让你自己去走吧，通往发疯的道路上毫无阻挡，你们大家全速前进吧．

至于我呢？我打算止步不前，并保持头脑清醒，至少和我往常一样清醒，尽管我是不太有头脑的[①]．

# 5 关于无限大种种

有不少字眼是出版商们喜欢用在科学幻想小说的标题中，对读者起一种直接广告的作用，它可以使科学幻想小说的信徒们在漫不经心地偶然瞥见这样的标题时，就知道这些书确实是科学幻想小说．“空间”和“时间”就是两个属于这样的字眼．另外还有象“地球”、“火星”、“金星”、“α半人马星座”，“未来”、“恒星”、“太阳”、“小行星”等等．其中有一个与本章所要介绍的内容有关，就是“无限大”．

依我看来，历来科学幻想小说最好的标题之一是约翰·坎贝尔（John Campbell）的《来自无限的侵犯者》．“侵犯者”这个字眼使人联想起侵略、战斗和不安，而“无限”这个字又带有外层空间的浩瀚和恐惧感．

唐纳德·戴（Donald Day）所著的必备书《科学幻想小说杂志索引》在其目录索引部分中列举了“无限的脑袋”，“无限的

① 本文初次发表后，读者们不断来信，催促我写一篇关于斯凯沃斯数的文章，我终于让步，于1974年写了一篇《斯凯沃斯的！》文章，诸位可以在我的《论大和小》一书的最后一章中找到这篇文章．（双日公司出版，1975年）．原注．

敌人”，“无限的眼睛”、“无限的侵略”、“无限的瞬间”、“无限的想象”、“无限的零”等，我敢保证，除此之外还有许多别的标题中也会出现这个字眼[①].

然而，对所有这些说法，对所有这些熟悉的用法，我们是否明白“无限”和“无限大”究竟意味着什么？也许并不是都清楚的吧.

我想，也许可以这样来开个头，假定无限大是一个大数，一个很大的数，也就是说，令它等于可能存在的最大的一个数.

如果这样做的话．那马上就错了．因为无限大根本不是一个大数，也不是任何一种数字，至少不是我们在使用“数字”这个字眼时，我们所想到的那种东西．它肯定不是一个可能存在的最大的数，因为根本不存在所谓“一个可能存在的最大的数”这件事.

让我们悄悄地来接近无限大．首先假定你要写一个指示给一位灵巧的小伙子，告诉他怎样把买票参加讲座的 538 位听众计数一下．假定只有一道特设的门，所有听众都必须排成单行通过此门鱼贯而出．年青小伙子只消按 1，2，3 等等的确定次序把每一个整数与每一名听众对应起来即可.

“等等”这个词可以用来继续计数，直到所有的听众全部离场．最后一个离开的人就获得了 538 这个整数．如果你想把次序标得清楚明白，你可以告诉小伙子用这样的方法来计数，但要费劲把 1 到 538 的所有整数列出．这件工作无疑是

① 本文初版于 1959 年九月，唐纳德·戴的索引仅收集到 1950 年．从 1950 年以来，在科学幻想领城里．由于文学渗透日益增加，因而“无限”这个字在科学幻想小说标题中的通用性日趋衰落．真是，好遗憾啊．原注.

沉闷而单调得无法忍受的，而你差遣的那位小伙子是聪明伶俐的，并且知道一个带有点子的一条线的间隔是什么意思，这样，你就可以写道："请这么数：1，2，3，…，536，537，538．这个小伙子就会懂得（或应当懂得），那条带有点子的线条表示需按次序且无遗漏地用 4 到 535 之间的所有整数来填满的这个间隔．

假定你不知道听众的数目是多少，可能是 538 或 427 或 651．你可以指示那个小伙子，让他一直数到给予最后一个人的那个整数，不管那个人是谁，也不管那个整数是什么．用符号来表示，可以这样来写："请数一下：1，2，3，…，$n$-2，$n$-1，$n$"，这个灵巧的小伙子就能懂得，$n$ 毫无疑问地表示某个未知的但是一个有限的整数．

现在，假定布置给那个小伙子的下一项任务是数一下进入一扇门，然后排队穿过房间，从另一扇门出来，绕大楼兜一个圈子后，重新穿过第一扇门的人数，这些人形成了一个连续的封闭系统．

设想川流不息的人和数着人数的小伙子都是不知道疲倦的，而且乐于在这样的活动中永远这样地干下去．显然这将是永远不会有最后的一个人，也永远不会有最后的一个数(任何整数，无论多么大，即使它由一系列用显微镜才能看见其大小的、从这儿排列一直延伸到最遥远星球的数字所组成，也可以轻而易举地再加上 1)．

那末我们怎样来对此事所包含的确切无误的计数写出指示呢？我们可以这样写："这么计数：1，2，3 等等，直至无穷"．

"等等，直至无穷"这些字眼可以简单地写成∞．

"1，2，3，…，∞"这种表示法可以读成"一，二，三等等，直到无穷"，或读成"一，二，三等等，直到无限"，但通常读成

"一，二，三等等，直至无限大". 即使数学家也是在这儿引入无限大的，比如乔治 · 盖莫夫 (Ceorge Gamow) ①曾经写过一本十分引人入胜的书，标题就是: 《一，二，三，…，无限大》.

## 大　　数

事实上，在古代是很少用到大数字的，所使用的最大数字的名称一般是"千". 在需要更大的数字的时候，就用"几十个千"或"几百个千"等词组来表达 (就象我们所用的词组一样). 在古代，再大的数字就被叫作"几十个千". "million (百万)"这个词 (来自一个意大利语，意为"大千") 表示"一千个一千"，只是到了中世纪晚期才出现的. 这时商业已经发展到这样的程度，一千个一千这样的数字在薄记中已经相当常用，制定出这一个特别的词，就便于使用. (随后又出现 billion、trillion 等数词，直至今天，对大数的用法尚未统一. 比如，billion 一词在美国表示"一千个百万"即十亿；而在英国则表示"一百万个百万"即万亿.)

只消读一下《圣经》就可以看出古人对大数是缺乏名称的，《圣经》中明确提到最大的数字的是出现在《历代志下》②第十四章第九节中，该节描写了埃塞俄比亚侵略军与犹大王阿萨 (Asa) 的部队之间的一场战争，它这样写道: "向他们冲来的是埃塞俄比亚人撒拉罕 (Zerah)，率领一支一千个一千人的部队……". 当然，这儿的描写是夸大了的，但这已是《圣经》中唯一的一次提到同一百万一样大的一个数字.

另一些场合，在需要大数的时候，只能作一些比喻而已. 比如在《创世记》③第二十二章第十七节中，上帝答应亚伯拉罕 (Abraham，他刚表白自己愿意把独生子祭献给上帝) 说: "我将把

① 盖莫夫，当代俄国血统的美国理论物理、天体物理学家，同时又是深受欢迎的科普作家. 他的著作《物理世界奇遇记》、《从一到无穷大》(即《一，二，三，…，无限大》) 等已译成中文由科学出版社出版. 译者注.

② 《圣经》，《旧约全书》第十四卷. 译者注.

③ 《圣经》，《旧约全书》第一卷. 译者注.

你的种子增加到如天穹之星辰或海滨之砂石那么多”(这种说法似乎可用于下图．它表明里约热内卢抗议中立的巴西船只在巴西对德、意宣战之前不久被击沉的人群)．



图 9  抗议的人群

甚至有这么一种感觉，有些数字是这样的巨大，大到似乎无法计数．因此所罗门王把他的臣民说成是“一大群百姓，其数之众是无法记述和计数的”(《列王纪上》第三章第八节)[①]．但在公元前三世纪，阿基米德就最早指出，任何有限的数字是可以轻而易举地说出其数目的．

可见，“无限大”这个字完全是可以使用的，由于它来自一个意为“无穷”的拉丁词，而如果盎格鲁撒克逊人早就用它的话，那就会好得多．“等等，直至无穷”的说法是不可能错的，

① 《圣经》，《旧约全书》第十一卷．译者注．

其意义也是明确的，从另一方面来说，“等等，直至无限大，”的词组，不可避免地要引起这样的概念，即无限大是某个有限的整数，虽然很大，但一旦到达这么个数字后，我们就可以停止了．

因此，我们可以直率地说，无限大不是一个整数，或我们所熟悉的任何一种数．它是一种特性，一种无穷无尽的特性．任何无穷尽的客体的集合（数或其他事物）都可以说成是“无限数列”或“无限集合”．从 1 开始往上数的整数的清单就是“无限集合”的一个例子．

尽管∞不是一个数字，我们仍然可以把它写在某些算术运算中．任何符号都是可以这么做的．我们可以在代数中用字母来这样做，并写成 $a+b=c$；或者也可以对化学式这么做，写成 $CH_4+3O_2=CO_2+2H_2O$；甚至还可以对一些抽象的事物也这么做，如，男人＋女人＝烦恼．

唯一必须记住的是，在通过算术方法来检验非整数的符号时，如果它们并不遵循普通的算术规则的话，那是不必大惊小怪的，因为算术的产生本来是特别应用于整数的．

比方说，3－2＝1，17－2＝15，4,875－2＝4,873，一般地说，任何整数在减掉 2 之后立即变为另一个不同的整数，若非如此，则其他的说法都是不可思议的．

但现在，假定我们从一个无穷的整数数列中减去 2，为了方便起见，我们可以去掉最前面的两个整数 1 和 2，则数列是这样开始的：3，4，5 等等，直至无穷，你是否发现，从 3 开始的整数数列就同从 1 开始的那样一样无穷无尽．因而可以把它写成：3，4，5，…，∞．

换句话说，从一个无穷集合中减去二项后，余下的部分仍

然是一个无穷集合，用符号表示，可以写成：$\infty-2=\infty$. 这看起来似乎很奇怪，因为我们已经习惯于在整数中减去 2 后得出一个差来. 但是，无限大既然不是一个整数，故使用的规则也就不同（这种情况是不会经常发生的）.

由于这个缘故，如果从整数数列中去掉头三个或头二十五个，或者甚至头 1,000,000,000,000 个整数，那末这个整数数列余下的仍然是无穷无尽的. 你总是可以从 1,000,000,000,001，1,000,000,000,002 等开始，无穷继续下去. 因此，$\infty-n=\infty$，式中 $n$ 表示任何一个整数，且不论它有多大.

事实上，还有比这更令人吃惊的事情呢. 倘若我们只考虑偶数，我们可以有一个象 2, 4, 6 等等直至无穷这样一个数列. 这是一个无限数列，因此可以写成：2，4，6，…，∞；同样，奇数也可以构成一个无限数列，它可以写成 1，3，5，…，∞.

现在，假定你沿着整数数列从头到底读一遍，把所遇到的每个偶数都划掉，即：1，~~2~~，3，~~4~~，5，~~6~~，7，~~8~~，9，~~10~~，11，~~12~~，…，∞，即从整数的无穷数列中去掉另一个偶数的无穷数列，剩下的仍然是一个奇数的无穷数列. 用符号来表示，可以写成：$\infty-\infty=\infty$.

进一步也可以用其他的办法来做. 如果你只从偶数开始，加上一个或者二个或者五个，甚至一万亿个奇数，所得到的仍然是一个无穷数列，因此 $\infty+n=\infty$. 实际上，如果你把一个奇数的无穷数列加到偶数的无穷数列上去，你所得到的恰恰就是一个所有整数的无穷数列，或者说：$\infty+\infty=\infty$.

说到这里，你们中很可能有人会怀疑我急于得出一个无穷数列.

总之，在头十个整数中，有五个偶数和五个奇数；在头一千个整数中，有五百个偶数和五百个奇数，余类推. 无论我们

取多少连续的整数，总有一半是偶数，一半是奇数.

因此，尽管数列2，4，6，…是无穷的，其总数只能等于另一个同样是无穷的数列1，2，3，4，5，6，…的一半. 对数列1，3，5，…来说，也是这样，它尽管也是无穷的，但总数只有所有整数数列的一半.

你可能认为，从所有整数的集合中减去偶数数列，可以得到奇数的集合. 我们所讲的即可表示为：$\infty-\frac{1}{2}\infty=\frac{1}{2}\infty$. 这样，你必然满意地认为，这是“有意义的”.

为了答复这种不同意见，让我们回过去再把听讲座的未知的听众数一数. 我们那位伶俐听话的小伙子一直在为我们数着，数着. 现在他感到厌倦了，转身向你问道：“讲堂里到底有多少个座位？”你答道：“640.”

他略加思索后便说：“好啦，我看每一个的座位都有人坐着，没有空出来的位子，也没有人站着.”

你同样是好眼力，回答说：“不错.”

“那么，”小伙子说，“为什么要在他们离开时再把他们数一数呢？我们现在立刻就知道听众恰好是六百四十个.”

他说得很对. 假如有两个客体的序列（序列A和序列B）恰好相配，以致序列A中的每个客体，都有且仅有序列B中的一个客体与之相对应，而序列B中的每个客体，亦都有且仅有序列A中的一个客体与之相对应，那么我们就可以知道，序列A中客体的总数与序列B中客体的总数恰好相等.

事实上，我们计数时正是这样做的，如果要知道一个满口牙齿完整的人的嘴里共有儿顺牙，我们只需给每颗牙齿编上一个号码（依次地），我们把一个号码只用于某一颗牙齿（这

叫作把二个序列一一对应）．我们便发现，只需 32 个数字就够了．这样，序列 1，2，3，…，30，31，32 就正好能同另一个序列一颗牙、下一颗牙、下一颗牙、…、下一颗牙、下一颗牙、一直到最后一颗牙相吻合．

因此，我们就可以说，在一个满口完整牙齿人的嘴里，牙齿的数目与从 1 到 32 的整数的数目（包括 1 和 32 在内）正好相等，或简短地说，有 32 颗牙齿．

现在我们也可以对偶数的集合作同样的处理．我们可以把偶数写出来，并给每个偶数一个号码．当然，我们无法把每个偶数都写出来，但总可以写出一部分，并且可以这样来开个头：我们把指定每个偶数的号码写在这个偶数的正上方，并用一个双向箭头把它们对应起来，即

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20\cdots \end{array}$$

这儿我们已经可以看出一个系统来了：每个偶数都被一个特定的数字而不是别的数字所指定，你只要把这个偶数除以 2，就可以说出这个特定的数字是什么．这样，偶数 38 就由 19 这个数字而不是别的数字所指定；偶数 24618 就由 12309 所指定．用同样的方式，全体整数数列中的任一给定的数字可以由一个而且是唯一的一个偶数来指定．538 这个数字用来指定偶数 1076 而不是指定其他偶数，29999999 这个数用来指定偶数 59999998 而不是指定其他的偶数，等等．

由于偶数数列中的每一个数，都可用于指定所有整数数列中的一个而且唯一的一个数，反之亦然，这两个数列即为一一对应，而且是两个等价的数列．偶数的数目就与所有整

数的数目相等，用同样的推理，奇数的数目也同所有整数的数目相等.

你会反对说，在全部偶数（或奇数）都用完之后，所有整数的数列还会有整整一半剩下来. 也许是这样吧，但这种争论是没有意义的，因为偶数（或奇数）数列是永远不会用完的.

因此，当我们说“所有整数”减去“偶数”等于“奇数”时，就等于是在说$\infty-\infty=\infty$，象$\frac{1}{2}\infty$这样的项可以扔掉.

事实上，在把偶数从所有整数中减去的时候，我们是在把整数每隔一个划去一个，这样就是用把数列除以 2 的方法. 由于该数列仍然是无穷的，所以$\frac{\infty}{2}=\infty$，而无限大的一半又是多大呢?

更妙的是，如果我们在偶数的数列中每隔一个数划去一个数，就可得到一个可以被 4 整除的整数的无穷数列. 如果我们在这个数列中再每隔一个数划去一个数，则又可得到一个可以被 8 整除的整数的无穷数列，可以这样无穷无尽地一直做下去. 这些每一个“较小”的数列与所有整数的各数列仍然是一一对应的. 如果某种整数的无穷数列可以无限地被 2 整除，而整除后所得的数列仍然是无穷的话，我们就可以说$\frac{\infty}{\infty}=\infty$.

如果你对那些已被删得稀稀拉拉的无穷数列是否仍然能与所有整数的数列一一对应抱有怀疑的话，那只要考虑一下那些被乘上一万亿的整数. 你可以得到：1,000,000,000,000、2,000,000,000,000、3,000,000,000,000、…、∞. 这些数可以与 1，2，3，…，∞一一对应，对“万亿整数”的集合中的任何一个数（比如说，4,856,000,000,000,000）来说，

在此情况下，在所有整数的集合中有一个而且仅有一个数与之对应，此数就是 4856；对所有整数的集合中的任何数（比如 342）来说，在“万亿整数”的集合中也有一个而且仅有一个数与之对应，那就是 342,000,000,000,000．所以，能被万亿除尽的整数的数目应当同全部整数的数目一样多．

也可以从另一个角度来进行思考．如在每两个整数之间插入中值分数，即：$\frac{1}{2}$，1，$1\frac{1}{2}$，2，$2\frac{1}{2}$，3，$3\frac{1}{2}$，…，∞，实际上，我们是在把数列的项数加了倍，而这个新的数列仍能与整数的集合建立一一对应，故 $2\infty=\infty$．其实，如果继续不断地这样做下去，在上述数列中插入所有的四分之一，再插入所有的八分之一，然后插入所有的十六分之一，仍可使所得的数列与所有整数的数列保持一一对应，故 $\infty\cdot\infty=\infty^2=\infty$．

乍听起来这好象难以令人相信，怎么能把所有的分数罗列起来，使我们能相信每个分数有且仅有一个数字与之对应？要把整数或偶数罗列起来是容易的，如 1，2，3，…和 2，4，6，…，就是把素数罗列起来也不太难：2，3，5，7，11，…，但怎么能把所有的分数全部罗列出来，并且肯定其中包括了所有的分数，甚至象 $\frac{14899}{2725523}$ 和 $\frac{689444473}{2}$ 这样一些随便想出的分数而毫无遗漏呢？

然而，确实有几种把分数全部罗列起来的方法．假定先把分子和分母之和为 2 的所有分数列出，这样的分数只有一个：$\frac{1}{1}$；然后把分子和分母之和为 3 的全部列出，这样的分数共有两个：$\frac{2}{1}$ 和 $\frac{1}{2}$；再下来把分子、分母之和为 4 的全部分数列出，它们是 $\frac{3}{1}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$，接着就是 $\frac{4}{1}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$，可以

看出，在每一组中，我们把分数的分子按序递减而分母递增的方式来排列.

如果我们列出这么一张清单：$\frac{1}{1}$，$\frac{2}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{1}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{4}{1}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{5}{1}$，$\frac{4}{2}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{1}{5}$等等，无穷继续下去，我们就可以肯定，任何一个特定的分数，无论多么复杂，都将被包括在内，只要我们这样继续下去，直到足够远为止. 分数$\frac{14899}{2725523}$将在那组分子分母之和为 2740422 的分数中，它是这组分数中的第 2725523 个. 同样，$\frac{689444473}{2}$将位于分子分母之和为 689444475 的那组分数中第二个分数. 这么一来，每个可能存在的分数就都能在数列中找到它特别指定的那个位置了.

接下来，可以把每个分数编上号码，那就没有一个分数会遗漏. 况且每个号码都有它自己的那个分数，也没有一个号码会遗漏. 所有分数的数列就这样与所有整数的数列建立了一一对应，因而所有分数的数目与所有整数的数目是相等的.

（在上述分数的清单中，你将发现一些分数在数值上是相等的，即$\frac{1}{2}$和$\frac{2}{4}$被列为不同的分数，但两者都有相同的值. 又如$\frac{1}{1}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{3}{3}$这样的分数，不仅具有相同的值，而且这个值又是一个整数 1. 这些都是对的，它说明分数的总数同整数的总数相等，即使在分数的数列中，每一特定的分数值及所有的整数值都被重复了多次，事实上是无穷多次.）

说到这里，你可以勉强地作出结论：所有的无穷大都是同一个无穷大；“无限大”就是“无限大”，不论你对它怎么做.

但事实却并非如此！

请考虑一条线上的点吧．可以把一条直线划分成相等的间隔并标以记号，这些划分记号可以用 1，2，3，等等，直至无穷的号码点表示，如果我们把直线想象成无限延伸的话．在这些整数点之间的中间点可以标上$\frac{1}{2}$，$1\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{2}$，…等数字，然后可以标出所有的三分之一的点、所有的四分之一的点、所有的五分之一的点，事实上，所有的无穷个分数数字都可以在直线上被指定为某个特定的点．

看来，直线上的每一个点似乎都可以被这个或那个分数指定．在用无穷个分数指定直线上所有的点之后，肯定不会有哪一个点被遗漏掉么？

事实究竟怎样呢？

你要知道，在直线上有这么一个点，它可以用相等于 2 的平方根即 $\sqrt{2}$ 的值来表示．这可以证明如下：如果在直线上作一个正方形，使其边长正好等于已知直线上已标明的一个整数间隔，则该正方形的对角线便恰好等于 $\sqrt{2}$ 了．如果把这条对角线平放到直线上，使其一端与直线上零那个点重合，另一端便与直线上可以被定为 $\sqrt{2}$ 的那个点重合．

现在，不易解决的问题就在于 $\sqrt{2}$ 的值不能用一个分数、用任何分数、用任何想象得出的分数来表示，这是古希腊人早就证明了的．证明很简单，但我要求你们相信我的话，在这里不予赘述，可以节省些篇幅．如果所有的分数都被指定为直线上的点，那么直线上至少有一个对应着 $\sqrt{2}$ 的点会被遗漏．

所有能表达成分数的数称为“有理数”，因为一个分数实际上是二个整数——分子和分母的比值．不能用分数来表达的数称为“无理教”，$\sqrt{2}$ 虽是第一个被发现的无理数，但决不是唯一的无理数．大多数的平方根、立方根、四次方根等等，

都是无理数；大多数的正弦、余弦、正切等等，以及包括$\pi$在内的数，还有对数，也都是无理数．

事实上，无理数的集合也是无穷的．可以看出，在一条直线上，可以用有理数来表示的任意两点之间，不管这两个点靠得多拢，总有至少一个由无理数来表示的点．

有理数和无理数总称“实数”．可以看出，任何给定的实数总能与一条给定直线上的一个且唯一的一个点相对应；而直线上的任何一点亦可与一个且唯一的一个实数相对应．换句话说，直线上无法用分数来指定的点，总可以用一个无理数来对应，没有一个点能够被排除在这两类数之外．

因此，实数数列和一条直线上的点的序列是一一对应而且是等价的．

谈到这里，下一个问题是，所有实数的数列或一条直线上所有点的序列（两者是等价的）能否与整数数列建立起一一对应呢？答案是：否！

无论你怎样来排列实数或点，无论你用什么可以想象得出的系统，总有无数个实数或点被遗漏，这是可以证明的．其结果就好象我们面临着这样的一批听众，所有的座位都坐满了人，却还有人站着．我们不得不得出结论说，人比座位来得多．因此，用同样的方法，我们也不得不得出结论说，实数或一条直线上的点，要比整数来得多．

如果我们想用符号表示点的无穷序列，我们就不想用$\infty$这个特号来表示“等等，直至无穷”，因为这个符号通常与整数或有理数相联系．由于一条直线上的所有的点表示一条连续的直线，故常用符号 C 来表示，C 表示“连续统”（*continuum*）这个词．

因此我们可以把点的序列写成：$P_1$，$P_2$，$P_3$，…，C．

## 乔尔格·康托尔

要说清楚康托尔（Georg Cantor）的国籍是困难的．事实上，他于 1845 年 3 月 3 日生于俄国的列宁格勒（那时叫做圣彼得堡），他的父亲是从丹麦移居俄国的，后来又离开俄国迁入德国，那时小康托尔才十一岁，此外，他的家庭还是犹太后裔，尽管他的母亲是天生的罗马天主教徒，而他的父亲则皈依了新教．



图 10 康托尔象

早在学生时代，康托尔就显出了数学家的天才，最后（不顾他父亲的反对）他终于选定数学作为自己的专业．1867 年他以优异的成绩获得了柏林大学的哲学博士学位．其后他在哈尔大学获得了一个教师的职位，1872 年提升为教授．

1874 年，康托尔开始引进他的令人难以捉摸的无限大的概念．伽里略曾早于他模糊地考虑过无限大，但康托尔是第一个建立起一个完整的逻辑结构的人，在这种结构中，他提出了一个超限数的序列，不妨这么说，它表示无限大的级．

从能够加以描述的集合来说，无限大的级并不多．整数的序列相当于它的第一级，实数的序列较之高一级，函数的序列又较其高一级，到此我们就不得不止步了．

康托尔的现点并未为他所有的同事都接受．特别是利奥普尔特·克朗尼格（Leopold Kronecker），他曾经是康托尔的老师，他猛烈地攻击康托尔的研究工作，出于专业上的忌妒，克朗尼格阻挠康托尔的提升，不让他获得拍林大学的一个职位．经不起过度劳累的激烈的论战，康托尔的精神终于在 1884 年崩溃，1918 年 1 月 6 日，他在萨克逊州的哈尔精神病院去世．

现在我们有了另一种无穷大，它不同于由“普通的无限大”来表示的无穷大，并更强于这种“普通的无穷大”.

这种新的更强的无穷大也有其特殊的算术．比如：在一条短直线上的点可以与一条长直线上的点、与平面上的点和与立体中的点建立起一一对应．事实上，我们大可不必多兜圈子，直截了当地说：“一条只有一百万分之一英寸长线段上的点的数目与整个宇宙空间中所有的点的数目一样多.”

大约在 1895 年，德国数学家康托尔制定了无限大的算术并对各种不同的无穷大建立了一个完整的序列，他称为“超限数”.

他用希伯来字母表中的第一个字母“阿列夫”来表示这些超限数，这个字母的字形是：$\aleph$.

各种超限数可以按大小的递增来排列，或者说，按无穷大的强度来排列，每一个超限数被标以从零开始的下标．最低的那个超限数可以称为“阿列夫 0”，然后依次称为“阿列夫 1”、“阿列夫 2”、“阿列夫 3”等等，直至无穷.

这可以用符号来记写：$\aleph_0$，$\aleph_1$，$\aleph_2$，…，$\aleph_\infty$

一般说来，不管你怎样用加、减、乘、除对某一个超限数进行处理，它总是保持不变的．只有在对一个超限数取同这个超限数相等（而不是小于这个超限数本身）的一个超限数次幂时，它才会发生变化，这时它便增大为比它高一级的超限数，即：

$$\aleph_0^{\aleph_0}=\aleph_1\text{；}\ \aleph_1^{\aleph_1}=\aleph_2\text{；}\ \text{等等}$$

我们平常认为是无限大的整数无穷数列，其无穷性等于阿列夫 0，即：$\infty=\aleph_0$．因此，大得似乎漫无边际的普通的无限大就变成了超限数中最小的一个.

我们用符号C来表示的那个无穷大，其无穷性或许可以用

阿列夫 1 来表示，即$C=\aleph_0$，但这一点还没有得到证明．迄今还没有一个数学家能够证明，在整数序列和直线上点的序列这两个无穷集合之间，存在着第三个无穷序列，其无穷性强于整数的无穷性而弱于直线上的点的无穷性．然而，也没有一个数学家能够证明，这样的一个中间无穷大确实并不存在[①]．

如果连续统确实等于阿列夫 1．我们就最终可以为我们的朋友“普通无限大”写出一个可以使它发生变化的方程，即：

$$\infty^{\infty}=C$$

最后，已经证明，在平面上可能画出的所有曲线的无穷性还要更强于一条直线上的所有点的无穷性．换句话说，要把曲线排列起来，使之与一条直线上的点建立一一对应而不遗漏一个曲线的无穷序列是无法做到的．曲线的这种无穷性有可能等于阿列夫 2，但这一点也是至今未获证明的．

我们只能到此为止．假定整数的无穷性是阿列夫 0，点的无穷性是阿列夫 1，曲线的无穷性是阿列夫 2，我们就已经走到了尽头．至今还没有人能提出任何类型的无穷大，其无穷性等于阿列夫 3（更不用说阿列夫 30 或阿列夫 3,000,000 了）．

正如约翰 · E · 弗洛因脱（John E. Freund）在他的著作《现代数学引论》[②]（我要向一切觉得本文最索然无味的读者推荐这本书）一书中所说的：“看来，当我们与无限集合打交道的时候，我们的想象力还不允许我们算到 3 以上．”

我想，如果我们现在再回到《来自无限的侵犯者》这个题目上时，我们仍有权不动声色冷静地问：“哪一种无限大？仅仅是阿列夫 0 呢，还是更大的？”

① 自从本文初次发表以来，已经证明了 C＝阿列夫 1 这个论断无论用什么方法都是既不能证明也无法推翻的．原注．

② 美国纽约，普林蒂斯-豪尔（Prentice-Hall）公司山版，1956 年．原注．

# 第二部分

# 数和数学

# 6 π 点 滴

在我的文章《那些疯狂的想法》（见双日公司 1962 出版的我的著作《事实和幻想》一书）中，我随便加了个脚注，大意是说 $e^{\pi i}=-1$．以后我收到了许多评论，奇怪的是，很大一部分的评论并非关于文章本身，倒是关于脚注的．有一位读者，与其说是气愤倒不如说是遗憾地对这个等式还作了证明，这倒是我疏漏了的．

于是我得出结论，认为某些读者所感兴趣的例是这些奇特的符号，由于我本人对此亦颇有兴趣（虽然我不是真正的数学家或是其他什么家），难以抑制一时的冲动，就选择了这些符号中的一个，即 π，在本章和下一章中来作一番议论．在第 8 章中，我将讨论一下 $i$．

首先，π 是什么？它就是希腊字母 *pi*，它表示一个圆的圆周长度与其直径长度之比．周长（perimeter）一词源出希腊文 *perimetron*，意即"一周的长度"．直径（diameter）一词来自希腊文 *diametron*，意即"对径的长度"，由于某些原因不明的理由，习惯上把 Perimeter 这个词用于多边形的周长，而在说到圆的时候，习惯上也采用拉丁文 *circumference*（周长）一词．我认为，这也无甚关系（我不是有修辞癖的人），但这样一来，就把符号 π 的来历弄模糊了．

早在 1600 年，英国数学家威廉·奥托兰特（willian Oughtred）在讨论圆的周长与它的直径之比时，就使用了希腊字母 π 作为圆周长的符号，并使用希腊字母 δ（delta）作为直径的符号，它们分别是 perimetron 和 diametron 两词的起首

字母.

数学家们现在往往在可能的时候通过令数值等于单位数值来简化问题. 比如，他们可能讨论一个直径为单位长度的圆. 在这样一个圆中，圆周的长度就在数值上等于周长与直径之比（我想，对你们中间某些人来说，这是很显然的，而其余的人可以根据我所说的话来理解它）. 由于在单位直径的圆中，周长等于比值，故比值可用符号 $\pi$ 即周长的符号来表示. 由于单位直径的圆是经常接触到的，所以这种习惯很快就变得根深蒂固了.

使用 $\pi$ 来作为圆的周长与其直径之比的第一个最优秀的人物是瑞士数学家利昂纳德 · 欧勒（Leonhard Euler），他在 1737 年使用了这个符号. 对欧勒说来既然是不错的东西，对我们大家来说当然都是不错的了.

现在我可以回过去把圆的一周的长度称为周长了.

但圆的周长与直径之比倒底是怎样的一个实际数字呢?

显然，即使在纯粹数学发明之前很久，这就是一直为古人关心的一个问题，无论修造什么建筑，在搭脚手架之前，如果不想接二连三地对助手吆喝:“你这个笨蛋，这些梁木都短了半尺!”就必须事先计算各种长度. 为了测量，不管怎样，在乘法中总得用到 $\pi$ 的值，即使测量与圆无关，而只与角度有关（角度是无法避免的），也总得碰到 $\pi$.

可以推测，最初认识到圆周率重要性的经验计算者们，是用画出一个圆然后实际测量直径和圆周长度的办法，当然，测量圆周的长度是颇需技巧的，因为使用普通的木制直尺是无法测准的，木尺对于测量圆周长度太不灵活了.

金字塔的修造者和他们的前辈们很可能是极为仔细地把

一条麻绳绕在圆周上，在围绕一周后作上一个记号，然后把麻绳拉直，再用木尺来量它的.（对于这种做法，现代的理论数学家们会皱起眉头傲慢地指责道:“你应对所作的假设是否正确先加证明，否则何以知道麻绳拉直后与弯曲时是一样长短呢？”我想，如果这样的责难落到组织修造庙宇的工匠头上，即使是最老实的人，也一定会把横加指责的人扔进尼罗河去的.）

然而，画了许多大小不同的圆，作了多次测量之后，建筑师和工匠们无疑很快就明白，对所有的圆来说，圆周率都是一样的.换句话说，如果一个圆的直径是第二个圆的二倍或$1\frac{5}{8}$倍，那么，它的周长也一定是第二个圆的二倍或$1\frac{5}{8}$倍.这样，问题就变为不是求出你在使用中感兴趣的特定的圆的圆周率，而是求出任何时候都要遇到的一切圆的普遍的圆周率.一但知道了π的值，对任何圆来说，就永远不再需要重新决定它的圆周率了.

至于对由测量而确定的圆周率的实际值，在古代取决于测量者的仔细程度以及他在抽象中所给予的精确度.比如，古代希伯来人不善于运用建筑师的方法，在他们需要修造一座建筑物（如所罗门的庙宇）的时候，便不得不请腓尼基的建筑师来帮忙.

可以料想，希伯来人在描绘庙宇图样时只愿使用整数，他们觉得毫无必要使用愚蠢而讨厌的分数，他们不愿在设计上帝的宫殿时受这种琐碎麻烦的东西的打扰.

因此，在《两个编年史》的第四章中，他们便这样来描绘一个建造在庙宇里面的“熔池”（它大抵是一种圆形的容器），这段描写是在该章的第二节里开头的，它说:“他也建造了一

个熔池，池为圆形，对径为十腕尺[①]，池高为五腕尺，其周长为三十腕尺”.

可见，希伯来人并未意识到，在他们给出一个圆的直径后（比如十腕尺或其他任何长度），他们就同时把圆周长也给定了．他们觉得必须把圆周长度规定为三十腕尺，这就说明了这样的事实，即他们认为圆周率恰好等于 3．

经常有这么一种危险，即某些过于墨守《圣经》中的词语的人可能把 3 看成是上帝最终神圣地制定了的 π 值．我怀疑这也许曾是某国家立法机关中一位头脑简单的人的动机，若干年前，他曾提出过一项法案，想在国界之内从法律上把 π 的值规定为 3．幸好，这项法案未被通过，否则那个国家里的所有车轮（它们当然是遵守堂堂国家立法者所制定的法律的），都会变成六边形了.

无论如何，那些古代建筑老行家们很明白，根据他们的测量，π 的值是明显地大于 3 的．他们所获得的最佳的 π 值是 $\frac{22}{7}$（如某你喜欢，也可以说成 $3\frac{1}{7}$），这个值其实是很不错的，直至今天，它仍被用在快速的近似计算中.

从小数来看，$\frac{22}{7}$ 大约等于 3.142857⋯，而 π 的实际值大约相当于 3.141592⋯．这样，$\frac{22}{7}$ 只比 π 的值高出 0.04%，或二千五百分之一，对大多数手工劳动来说，这个值已经是够好的了.

## 阿 基 米 德

古代最伟大的科学家和数学家阿基米德是一位天文学家的儿

① 腕尺，古长度单位，等于肘至中指尖的长度，约长 18～22 英寸．译者注．



图 11 阿基米德象

子，直到伊萨克·牛顿诞生之前，二千年中还没有出现过足以与他相提并论的人物. 虽然他曾在当时的大学城亚历山大受教育，但他的研究工作却都是在西西里岛他的家乡锡拉库扎城完成的. 他于公元前约 287 年出生在那里，可能是锡拉库扎国王希隆(Hieron)二世的亲戚，家境相当富裕，足以使他能居闲从事研究工作.

阿基米德发现了杠杆原理和浮力原理. 利用浮力原理，他得

以不损坏王冠而算出金冠中是否掺入了铜.阿基米德是在洗澡时触动灵感而发现这条原理的，他立即光着身子跑过锡拉库扎城，口中高呼“Eureka，Eureka!”（我知道了，我想出来了!）

关于他的最动人的传说是他长长一生的晚年.在锡拉库扎与它的盟国罗马共和国分裂后，罗马派了一支舰队来围城.当时阿基米德一人负责城防工作，他想出了一些灵巧的机械来摧毁舰队.估计他可能是设计了一些大型透镜使舰只着火，用一些起重机械举起敌人的船舰并把它们弄翻等等.最后，据说罗马人不敢过分靠近城墙，只要看见城墙上出现象一根绳子之类的玩意儿，就吓得赶快逃离.

然而，围城三年之后，该城终于在公元前212年被攻陷.罗马军总司令命令活捉阿基米德，当时他正在潜心思考一道数学题，一名士兵找到了他，命令他跟他走.他拒绝离开他在沙地上所画的图形，那士兵一怒之下就把他杀了.

希腊人后来发展了一套不用这种绳子和木尺来测量圆周长度的几何方法.很明显，这套方法可以获得与用木尺、绳子和人眼的办法一样精确的数值，但所有这些还不是很完善的.希腊人进而推论，一旦发现了理想平面几何中的纯粹直线和曲线，则在计算中，$\pi$应取什么值才是适当的.

比如，锡拉库扎的阿基米德已经使用了“逼近的办法”来计算$\pi$，（这是积分运算的前身，如果其后几世纪的哪位慈善慷慨之士能通过时间机器把阿拉伯数字赠送给他的话，阿基米德也许会在牛顿之前二千年就发明这种运算的）.

为了说明这个想法，想象一下一个三个顶点位于单位圆的圆周上的等边三角形.用普通的几何方法就可以精确地计算出这个三角形的周长为$3\sqrt{\frac{3}{2}}$，如果你好奇的话，可以把它写成小数形式，即2.598076…，由基本的几何推理又可知道，这个周长必然小于圆周的长度（即小于$\pi$）.

下一步，想象一下把三角形各顶点之间的弧分为二等分，这就可以在圆周上作成一个正六边形（一个有六条边的图形）．它的周长亦可确定（恰好等于 3），可以看出它比正三角形的周长要大，但仍比圆周长要小．继续按此下去，就可以得到圆的内接正 12 边形、正 24 边形、正 48 边形…

多边形与圆的周界之间的空隙变得越来越小，或者多边形无限向圆周“逼近”，可以按你的愿望让多边形不断接近圆周，尽管它们永远不能完全与圆周重合．可以同样用一系列圆的外切正多边形（它们位于圆周外面，各边分别与圆周相切）来重复同样的工作，得到一系列逐渐减小、但不断趋于圆周长的数值．

实质上，阿基米德把圆周长包围在二个级数之间：一个从下面逐渐逼近 π，另一个从上面不断逼近 π．这样，只要有足够的耐心，忍受得了边数极多的多边形的沉闷单调的计算，就可以把 π 的值确定到任意的精确程度．

阿基米德花了大量的时间，极耐心地一直计算到九十六边形，发现π的值略小于 $\frac{22}{7}$，而略大于 $\frac{223}{71}$（这个分数仅比 $\frac{22}{7}$ 略小一些[①]）．

这两个分数的平均值是 $\frac{3123}{994}$，化为小数相当于 3.141815，它仅比 π 的实际值大 0.0082%，或 $\frac{1}{12500}$．

① 我国魏晋数学家刘徽于魏景元四年（公元 263 年）在注《九章算术》中提出割圆术来计算圆周率的想法，这个想法中也已包含了求极限的概念．他正确地算出圆内接正 192 边形的面积，从而得出 π 的近似值为 $\frac{157}{50}$（=3.14），又算出圆内接正 3072 边形面积．从而得到 π 的近似值为者 $\frac{3927}{1250}$（=3.1416）．译者注．

在欧洲，至少直到十六世纪，再没有得到过比这个值更佳的数值了．此后才首次用$\frac{355}{113}$这个分数作为π的近似值[①]．如果要把π表示成一个简单的有理分数的话，这个数就是它的最佳近似值了．$\frac{355}{113}$化为小数是 3.14159292…而π的真正的值是 3.14159265…，可见$\frac{355}{113}$仅比π的真正值大 0.000008%或$\frac{1}{12500000}$．

想了解一下近似值$\frac{355}{113}$的精确度有多高，只须假设地球是一个标准的球体，其直径正好等于 8000 英里．我们可以将 8000 乘上 π，计算出赤道的长度．如果用$\frac{355}{113}$作为 π 的近似值的话，得出赤道的长度为 25,132.7433…英里；而从 π 的实际值所得到的赤道长度为 25,132.7412…英里，两者相差大约是 11 英尺．在计算地球的周长时，11 英尺的误差完全可以认为是微不足道的，即使把地理测量提高到新的精确度水平的人造卫星，也未能给我们提供比这更精确的测量．

除了数学家之外，对任何人来说，$\frac{355}{113}$都是足够精确的，除非是最不寻常的情况．但数学家有他们自己的想法，找不到精确值是不能叫他们愉快的．一个误差，无论多么微小，在他们看来，都象是一百万秒差距一样糟糕．

向π的实际值进军的关键性的一步是由十六世纪法国数

① 我国南北朝时代数学家祖冲之（公元 429～500 年）曾推算 π 的值在 3.1415926 和 3.1415927 之间，并提出约率$\frac{22}{7}$，密率$\frac{355}{113}$，比欧洲早一千年左右．译者注．

学家弗兰索瓦·韦达（François Vieta）[①]提出的．他被公认为代数学之父，因为他首先引用字母作为未知量的符号，即著名的 $x$ 和 $y$，在我们大多数人的生活中，随时面临着不安和动乱时都要用到它们．

韦达对阿基米德所用的几何逼近法用代数中相应的方法来作了演算，即不用建立一个越来越靠近圆周的多边形的无穷序列，他推导了一个分数的无穷级数，可用它来估计给出 $\pi$ 的数值．用于估计的级数的项数越多，就越接近 $\pi$ 的精确值．

我不打算在这里介绍韦达的级数，因为其中包括着平方根、平方根的平方根以及平方根的平方根的平方根，在其他数学家们已经得出了估计 $\pi$ 值的更容易写得出的级数（经常是无穷级数）之后，就没有必要再把自已缠在那个式子里了．

例如，1673 年德国数学家哥特弗里德·威尔赫姆·莱布尼兹（他最早发明二进制，见第 2 章）推得一个可以表达成下列形式的级数：

$$\pi=\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\frac{4}{13}-\frac{4}{15}\cdots$$

我本人并非数学家，实在没有什么值得一提的数学洞察力，在我起初决定写这篇文章的时候：我认为可以用莱布尼兹级数来进行一段简短的演算，以此向读者们表明它如何能轻而易举地得出一打左右位数的 $\pi$ 值．然而，刚开始后不久，我就放弃了这个想法．

你可能要讥笑我没有耐心，但欢迎你们中随便哪一个来把莱布尼兹级数计算一下，只要算到上面给出的那几项，即

① 弗兰索瓦·韦达，法国数学家，公元 1540～1603 年．译者注．

$\frac{4}{15}$就行．你甚至可以寄一张明信片来把你的结果告诉我．要是在你完成运算后很失望地发现答案并不象$\frac{355}{113}$这个数值那样地接近π的话，也不要放弃，可以再加上几项．在你的答案上加上$\frac{4}{17}$，然后减去$\frac{4}{19}$，再加上$\frac{4}{21}$，再减去$\frac{4}{23}$等等．可以这样继续下去，喜欢多长就多长，要是谁发现需要多少项来使$\frac{355}{113}$这个值有所改进，也请写个便条给我，告诉我结果如何．

当然，这些都可能让你失望．无穷级数肯定是π的实际值和精确值的一种表达方式．对于一位数学家来说，这是与其他表示数值的方式一样有效的方法．但如果你想把它写成实际数字的形式，它又如何对你有所助益呢？想把几打的项相加起来，对任何想以日常生活的方式办事的人来说都是不切实际的．那么，又怎么可能把无数个数字相加起来呢？

但是，正因为项的数目是无穷的，数学家们就不会放弃求一个级数之和的努力，比如级数：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots$$

是可以用越来越多连续的项来求和的，如果你去做一下，就会发现，所用的项越多，其和就越接近1，可以用缩写的形式来表示这个无穷级数，说它的无数个项之和总之是1就行了．

事实上，有一个公式可以用来确定任何递减几何级数之和，上面的级数使是一个实例．

因此，把级数：

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\frac{3}{100000}+\cdots$$

的所有光辉灿烂的无数个数字相加起来，只能得到$\frac{1}{3}$．而级数：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{20}+\frac{1}{200}+\frac{1}{2000}+\frac{1}{20000}+\cdots$$

相加后则得$\frac{5}{9}$．

肯定说，计算出π值的级数没有一个是递减几何级数，因此不能用公式来求和．事实上，可以算出莱布尼兹级数或其他任何级数之和的公式一直没有找到过．然而，起初似乎没有理由假定某种能够计算π值的递减几何级数的方法也许根本不存在．如果找得到，则π就可以被表示成一个分数．一个分数实际上是二个数之比，任何可用分数或比值来表示的数是“有理数”，就象我在前一章中已经说明过的那样，当时所希望的是π也许是一个有理数．

证明一个数是有理数的一个办法是求出它的小数值，尽可能把小数位数算到足够多（比如，把一个无穷级数的越来越多的项相加），然后看出结果是一个“循环小数”，即一个某数字或某些数字的数组本身无限重复的小数．

比如，$\frac{1}{3}$的小数值是0.333333333333…，而$\frac{1}{7}$的小数值则是0.142857142857142857…等等，无限继续下去．即使象$\frac{1}{8}$这样一个看来“除得尽”的分数，如果把零也算上去的话，由于它的小数值是0.125000000000…，所以实际上也可说是一个循环小数．可以从数学上加以证明，每个分数无论多么复杂，都可以表达成一个小数，它或早或迟可变成一个循环小数．反之，任何其尾端变成循环小数的小数，不论其循

环部分包含着什么，也可以表达成一个精确的分数.

任取一个循环小数为例，比如：0.373737373737…，首先，可以从这个小数中找到一个递减的几何级数，只要这么来写：

$$\frac{37}{100}+\frac{37}{10000}+\frac{37}{1000000}+\frac{37}{100000000}+\cdots$$

就可以使用公式来求出它的和，得到$\frac{37}{99}$（试求出与该分数等值的小数，并看看得到的是什么）.

或者假定有这么一个小数，它开始是不循环的，然后变成了循环小数，比如：15.21655555555555…它可以写成：

$$15+\frac{216}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{5}{100000}+\frac{5}{1000000}+\cdots$$

从$\frac{5}{10000}$开始，可以得到一个递减的几何级数，求出其和为$\frac{5}{9000}$，故级数变成一个有限的级数，只有三项组成，别无其他项，其和可以容易地求出：

$$15+\frac{216}{1000}+\frac{5}{9000}=\frac{136949}{9000}$$

如果愿意的话，不妨把$\frac{136949}{9000}$再化为小数，看看得到的是什么样的小数.

这样，如果能够求出带有若干位小数的$\pi$的小数值，并发现其中带有一些循环小数的话，不管其循环部分是如何微小、如何复杂，只要能把它表示成无限继续的形式，就可以写出一个新的级数来表达它的精确值. 这个新的级数应包括一个可以求和的递减几何级数，这样就能得到一个有限的级数，而$\pi$的实际值也可以不表示为一个级数而表示为一个实在的数.

数学家们投身于这种追踪．1593 年，韦达本人使用了他自己的级数把 $\pi$ 计算到了十七位小数．如果你想看它一下的话，那就是：3.14159265358979323．可以看到，找不到任何明显的循环．

后来在 1615 年，德国数学家鲁道尔夫 · 冯 · 蔡伦（Ludolf Von Ceulen），使用了一个无穷级数把 $\pi$ 算到了小数三十五位，其仍然不能发现任何循环的迹象．然而，在他的年代里，这是一种令人难忘的奇迹，使他赢得了 $\pi$ 后来在德国教科书中有时被称为"鲁道尔夫数"的声誉．

到了 1717 年，英国数学家阿布拉罕 · 夏普（Abraham sharp）超过了鲁道尔夫，把 $\pi$ 算到了小数后第七十二位，仍然找不出什么循环的迹象．

但从此以后，对 $\pi$ 的计算就中止了．

要证明一个数是有理数，必须把它表示成一个等值的分数并写出这个分数．然而，要证明它是无理的，就不必求出那怕是一位小数．你只须假设这个数可以表示为一个分数 $\frac{p}{q}$，然后指出其中存在着矛盾，比如 $p$ 必须同时是偶然又是奇数．这就证明了没有一个分数可以表示这个数，因此它就是无理的．

这种证明恰恰是古代希腊人研究出来的，用以表明 2 的平方根是无理数（这是第一个发现的无理数）的．据推测，这是毕达哥拉斯学派首先发现的，他们在发现可能存在着无法用任何分数、无论这分数多么复杂来表示的数的时候，吓得毛骨悚然，于是相互发誓要严守秘密，谁要是泄露了这个秘密就得被处死．但和从无理数直到原子弹的一切科学秘密一样，这

个发现最终还是走漏出去了．

最后，在 1761 年，德国物理学家和数学家约翰·海恩里希·兰伯特（Johann Heinrich Lambert）[①]终于证明了π是一个无理数，因此就根本找不到任何分数的表达式，不论多么徽弱的表达形式，也不论求出多少位小数，其实际值只能被表达为一个无穷级数．

天哪！

但不必伤心．一旦证明了 π 是个无理数，数学家们就满意了，问题也就解决了．至于将 π 用于物理计算，这个问题已经结束：也业已完成了．你可能会认为，在极为精密的计算中，有时也许需要知道 π 的精确到好几十位甚至几百位的小数值，但事实并非如此！当代科学测量的精确度已经是很高的了，但仍不大会有精确到十亿分之一的情况发生，即使把 π 用于这样精确的计算，也只不过需要九至十位小数就足够了．

比如，假定我们画出一个直径为一百亿英里的圆，以太阳为中心，把整个太阳系都包围在里面．假如你用 $\frac{355}{113}$ 为 π 的近似值，想计算这个圆的周长（它的长度要超过三百一十亿英里），所得到的误差也不会大于 3000 英里．

假如你是一个一丝不苟的人，觉得在 31,000,000,000 英里的周长中有 3,000 英里的误差还是无法忍受的，你可以运用鲁道尔夫的 35 位小数的 π 值，这时你所得到的圆周长，其误差就相当于一个质子直径的一百万分之一了．

或者我们取一个大圆，假设以已知宇宙为周长，假定正在建造中的大型射电望远镜可以接收从 40,000,000,000 光年这么远的距离发来的信号，一个以这个长度为半径的宇宙圆，

① 兰伯特，德国物理、天文、数学家，公元 1728～1777 年．译者注．

其周长大约等于 150,000,000,000,000,000,000,000 ($1.5\times10^{23}$) 英里，如果用鲁道尔夫的 35 位的 π 值来计算这个圆的周长，其误差大约不到一百万分之一英寸.

那末，我们对夏普的 72 位的 π 值又能作些什么评论呢?

很明显，所知的 π 值，即使在它的无理性被证明的时候，也已经远远超过了科学所可能要求的精确度，不论是目前还是将来.

然而，对于早已超出科学家们需要的 π 值，整个十九世纪的上半个世纪里，人们仍然在继续不断地求出比已经确定了的值更多的数位.

一位名叫乔治·威加（George Vega）的人把 π 算到了 140 位，另一位名叫查恰连斯·达斯（Zacharias dase）的人算到了 200 位，还有一位名叫雷歇（Recher）的则把它算到了 500 位.

最后，在 1873 年，威廉·谢克斯（William Shanks）报告说，他已经把 π 的值求到了小数 707 位. 直到 1949 年，这个记录一直保持着，也算得上是个小小的奇观. 谢克斯花了整整十五年的时间来求得这个数值，而且更糟的是，看不出任何循环的迹象.

你可能会奇怪，是什么动机促使一个人花十五年的时间去做一件毫无目的的工作呢? 也许这和促使一个人去坐在旗杆顶上，或者生吞金鱼的想法是一样的，为了要“打破记录”，或许谢克斯认为这是使他自己通向成名的一条道路.

如果确实是这样的话，他的目的达到了，数学史在记述了诸如阿基米德、费尔马、牛顿、欧勒、高斯等人的著作之余，也将会挤出那么一、二行的篇幅来记述 1873 年前威廉·谢克斯曾把 π 计算到小数 707 位这件事. 这样，他也许会觉得自己的生命没有虚度.

可是，天哪！为了人类的虚荣心——

1949 年，巨大的计算机问世了，操作计算机的小伙子们充满兴趣，精力旺盛，偶然能够挤出时间来玩计算机．

有一次，他们把一个无穷级数输入了称为ENIAC的计算机中，让它来计算π的值．他们用计算机计算了七十个小时，得到了有 2035 位的π的值[①]（活见谢克斯的鬼！）

在第五百几十位的地方，发现谢克斯的值有一个错误，这样，谢克斯的 π 值的第五百几十位以后的所有数位，足足有一百多位，便全部报了销，这就把可怜的谢克斯和他的十五年浪费了的光阴全都一笔勾销了！

当然，万一你要想知道的话，其实是不应该有疑问的，可以告诉你，在计算机算出的值中仍然看不出有任何循环的迹象．

# 7 几何作图的工具

上面那一章还没有把 π 的故事全部讲完，正如标题所说的那样，这只不过是 π 的点滴罢了，因此让我们再继续往下说吧．

希腊人对几何学的贡献在于把这门学科理想化和抽象化了．埃及人和巴比伦人曾用特定的方法来解决特定的问题，

① 到了 1955 年，一台快速计算机在 33 个小时之内把 π 算到了 10,017 位，从研究 π 的各种数位得到了有趣的数学观点（很可能此后又算到了更多的数位，但我未曾继埃搜集）．原注．

但他们却从来没有设法建立通用的规则.

然而，希腊人则努力使几何学通用化，他们觉得数学的图形具有某些永存的、不变的固有特性. 他们也觉得，考察这些特性的本质和它们之间的关系，乃是人类体验美和神的绝对本质所能达到的最接近的程度——如果我能脱离科学片刻，闯入人类的宗教领域，我也许要指出，这个观念恰恰是埃德那·圣·文森·米雷（Edna St. Vincent Millay）的一句名言中所说的:“能觊觎美神真面目的，唯欧几里得（Euclid）一人而已.”

为了最终能看清美神的真面目，我们就不得不设想以完美的、理想化的组成部分来构成完美的、理想化的图形. 比如，理想直线只具有长度，别的什么也没有；事实上，也只有长度. 两条理想的、完美的、准直的理想直线，相交于一个理想的、完美的点，这个点，除了位置而外，压根儿就没有大小. 一个圆是一条直线上的各点以完全等同的方式弯曲的线，在这条曲线上的每个点到一个特定的、称为圆心的点均精确地等距离.

很不幸，这样的抽象虽是我们可以想象得出的，但通常却并不是把它们仅仅作为抽象来进行交流的. 为了说清这种图形的性质（即使是为了你本人对它们进行研究），就必须用一支尖细的棍子、粉笔、铅笔或者钢笔把它们画在蜡板上、泥地上、黑板上或者纸头上，以助思考，这事实上几乎是少不了的. 而所画出的图形却只是一些粗糙的、有宽度的、拙劣的近似线条（可惜，在数学中，美神必须被包裹在衣锦之中，就象在生活中一样）.

而且，为了证明各种几何图形的一些无可言喻的美的特性，通常有必要用到比图形本身所具有的线条更多的线，也

许有必要通过一点画出一条新的直线，使之平行于、或者（也许）垂直于第二条直线，也许必须把一条直线分成相等的两部分，或者把一个角的大小加倍.

## 欧 几 里 得

亚历山大大帝[①]（Alexander the Great）逝世以后，他的几位将军先后统治了古代的世界. 其中一位名叫托勒密（Ptolemy）[②]的建立了一个后来统治埃及达三个世纪之久的王朝. 他把他的京都亚历山大城改造成古代最伟大的文化中心，欧几里得就是曾经在那里工作过的一位第一流的伟大人物.

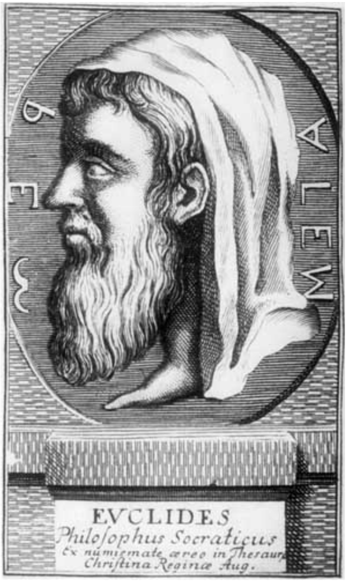



图 12 欧几里得象

关于欧几里得个人的传记后人知道得很少. 他大约生于公元前 325 年，我们不知道他生于何地，死于何时何地.

他的名字与几何学结下了不解之缘，因为他编写了部关于几何学的教科书《几何原本》. 这本书，当然先后曾有些修改. 但一直是几何学的权威著作，自从印刷术发明以来，前后共再版了一千次以上，他无疑是历来首屈一指的教科书编写者.

然而，作为一位数学家，欧几里得的名望倒不是在于他自己的研究工作. 收入他的教科书中的定理，几乎没有一条是他自己发现的，欧几里得的贡献以及使他成为伟人的，是接受了直到他的

① 亚历山大大帝，马其顿国王，公元前 356～323 年. 译者注.

② 托勒密王朝，从公元前 323 年到公元前 47 年，前后经历十六代国王. 译者注.

时代人类所积累的全部数学知识，并集其大成，编写成一本完整的著作．在编写这本书的时候，他推论了一系列公理、公设，并以此作为全书的起点，就其表达之简洁明了和文笔之优美流畅来说，这些公理和公设是足以令人赞美的．

除了几何学之外，他的教科书还论述了比和比例以及我们今天称之为数论的内容．他也曾把光线描绘成直线从而把光学作为几何学的一部分来加以研讨．

关于他的传说中有一条与托勒密国王有关．托勒密在学习几何时曾请教过欧几里得，问他能不能把他的证明搞得稍为简单易懂一些，欧几里得顶撞了国王，他说："在几何学中是没有皇上走的康庄大道的．"

为了把这些图尽可能地全都画得工整准确，必须使用器械．我想，一旦你习惯于希腊人的思考方法之后，那就很自然地认为，为此目的而使用的器械愈少、愈简单，则所绘出的图形就愈接近于理想．

最后，作图的工具被减少到一个极妙的最小值 2，其一是直尺，用于画直线，需要提醒的是，这并不是一把刻有英寸或厘米的尺子，这是一把没有刻度的木尺（金属或塑料亦可用于此种目的），除了用这器械画出直线这种形状外，不会再有更多的用处了．

第二件工具是圆规，它最简单的用途是画圆，也可以用于在直线上划出等分线段，或画出相交的弧来得到一个到其他两点等距离的点，等等．

假定读者大多学过平面几何，并曾使用过这些工具来作一条直线与另一条直线相垂直、平分一个角、作一个三角形的外接圆等等．所有这些工作和其他无数工作都可以用直尺和圆规，经过一系列的有限的操作来完成．

当然，到了柏拉图（Plato）[①]时代，已经知道可以用一些稍为复杂的工具来简化某些作图问题．实际情况是，有一些单凭直尺和圆规无法解决的作图问题到那时就可以解决了．这对希腊几何学家来说就跟用箭来射狐狸或蹲着的鸭子，或者用虫饵来钓鱼，或在解题时到书背后去找答案一样．这虽然是可以获得效果的，但这种做法并非属于君子风度．对几何作图来说，直尺和圆规是唯一“正当”的工具．

当时亦未感到，这种限于直尺和圆规的作图规定对几何学的限制不免过于苛刻，有时，墨守这些作图工具可能是令人厌烦乏味的，如果使用别的工具，也许会更易于走捷径；但当时曾这么断定，只要具有足够的耐心和聪明才智，仅用直尺和圆规也是能够完成这一切工作的．

比如，如果给出一个其长为定值的线段，令其表示数字1，则可以只用直尺和圆规作出另一条线段，使之恰好等于该长度的2倍，以此来表示数字2，或另一些线段表示3，5，500，或表示$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{3}{5}$，$2\frac{3}{5}$，$27\frac{16}{23}$等．事实上，只要使用圆规和直尺，就可以把任何有理数（即任何整数或分数）用几何的方法来加倍．你甚至可以使用一条简单的约定（可惜希腊人是从来不使用这种约定的），就可以用这种方法来表示所有正的和负的有理数．

一旦发现了无理数，即不能写成某种分数形式的数字，那么，看起来圆规和直尺便似乎无法表示无理数了，即使在这样的情况下，它们也不会对此束手无策．

比如，2的平方根的值是1.414214…等等、等等，无穷继续下去，然而，你能不能作一条线段，使之等于另一条线段的

① 柏拉图，古希腊哲学家，公元前427～347年．译者注．

1.414214…倍，而你在作的时候可能还根本不知道你想要画的这条线段精确地说来到底应当等于它的多少倍.

事实上，这是很简单的，设想有一条从 $A$ 点到 $B$ 点的已知线段（我想，可以不必画出图就可作好，但是如果你感到需要的话，你可以在读本文的时候自己把这些线段画一下，那不是很难的事），让这条线段 $AB$ 表示 1.

接着，通过 $B$ 点作一条直线与 $AB$ 垂直，现在你有了两条直线，构成一个直角. 以两直线的交点 $B$ 点为圆心，用圆规画一个圆，使该圆的圆周通过 $A$. 这个圆周即能与你刚才所作的那条垂线相交于一点，称之为 $C$，由于大家都熟悉的圆的性质，线段 $BC$ 与 $AB$ 正好相等，也等于 1.

最后，把 $A$ 点与 $C$ 点用第二条直线连接起来.

可由几何学证明这条直线 $AC$ 的长正好等于 $AB$ 或 $BC$ 的 $\sqrt{2}$ 倍，因此它表示无理数 $\sqrt{2}$ .

当然，不要以为只需用 $AB$ 来度量 $AC$ 就可以得出 $\sqrt{2}$ 的一个精确值. 由于这个图形是由一个不熟练的人，用不精确的工具来作出的，它仅仅是所表示的理想图形的粗糙的近似. 由 $AC$ 所表示的理想线段才是 $\sqrt{2}$ ，而在实际的现实中，$AC$ 本身并不表示 $\sqrt{2}$ .

用同样的方法，可以使用直尺和圆规来表示其他无数个无理数.

事实上，希腊人没有理由怀疑，任何可以想象得出的数字都能够由一条线段来表示，而这条线段可以仅仅用直尺和圆规，经过有限的步数作出. 由于一切作图问题都可以归结为作出表示一定数字的一定线段，因此可以感觉到，用任何工具作出的任何图都能够只用直尺和圆规来作，有时，尺规作图的具体步骤可能难以捉摸，暂时无法发现；但希腊人觉得，只

要具有足够的灵感、洞察力、智慧、直觉和运气，作图的方法最终总是能够发现的.

比如，希腊人一直没有研究出如何只用直尺和圆规来把一个圆周分为十七等分. 然而，这是可以作出的. 作图的方法直到 1801 年还没有发现，可是就在那一年，年仅二十四岁的德国数学家卡尔 · 弗列德里希 · 高斯（Karl Friedrich Gauss）找出了作图的方法，一俟他把圆周分成了十七等分，就可以用直尺把十七个等分点连接起来，从而构成具有十七条边的规则多边形（“正十七边形”）. 用同样的方法可以作出一个正 257 边形，以及其他无数个边数更多的多边形，可能作出的边数可以用一公式计算出来，但我不打算在这里介绍这条公式了.

## 卡尔 · 弗列德里希 · 高斯

高斯于1777年4月30日生于德国的不伦瑞克(Braunschweig)，是个花匠的儿子. 他在数学上是个神童，而且一辈子一直是一个奇才，他有超人的记忆力和惊人的心算能力. 还在三岁的时候，他已经能纠正他父亲帐目中的错误. 他的出类拔萃的能力为人所发现，由不伦瑞克的费迪南德（Ferdinand）公爵资助送去深造，1795 年，高斯进了哥廷根（Göltingen）大学.



图 13 高斯象

还在十多岁的时候，他已作出了许多卓越的发现，包括“最小二乘方法”，这个方法可仅以三个测点来确定一条最佳拟合曲线. 还在大学读书的时候，他证明了一种正十七边形的作

图方法，更重要的是，他还指出，什么样的多边形不能用这种方法来作，这是最早的关于数学的不可能性的证明.

1799 年，高斯证明了代数学基本定理，即每一代数方程必具有一个复数形式的根，1801 年他继续证明了算术基本定理，即每个自然数均可表示为素数乘积的形式，而且这种表示方式是唯一的.

这一切都需要高度的思想集中. 有一个故事，说的是 1807 年他的妻子临终前，他正专心致志地埋头研究一个问题，有人告诉他说，他的妻子快咽气了，他抬起头来，低声地咕哝说:“去跟她说，请她稍等一会儿. 我马上就好了”.

尽管个人的悲剧接连不断，但他灵敏的思想似乎永不枯竭. 在六十二岁时，他自学俄语. 他先后两个妻子都年纪轻轻就死去，他生过六个孩子，可只有一个死在他的后头. 1855 年 2 月 23 日，他在哥廷根逝世.

如果作一个象正十七边形这样简单的图就可以把伟大的希腊几何学家难住. 而结果被证明是一个完全可解的；那末，为什么任何可以想象得出的作图，不论看起来如何困难，不能最后被证明为可解的呢?

举个例来说，把希腊人难住的作图题之一是：给出一个已知圆，求作一个正方形，使其面积与该圆的面积相等.

这个题称为“化圆为方”

有好几种方法可以解决这个问题. 下面就是一种方法：用你手里最精确的测量工具，把圆的半径量一下. 比如，就随口说说吧，如果半径恰好是一英寸长（这种方法可适用于任何长度的半径，那么为什么不尽量利用它的方便性呢？)，把那条半径平方，谢天谢地，因为 1×1 等于 1，其值仍然为 1. 然后用你所能弄到的最佳的 π 值来乘它（当我又回到 π 的时候，你们不感到奇怪吗？)，如果你把 π 的值取为 3.1415926，那末该

圆的面积即为 3.1415926 平方英寸.

现在，取该值的平方根，其值为 1.7224539 英寸，用你的测量工具划出一条长度正好等于 1.7724539 英寸的线段. 在线的两端均作一条垂线，在两条垂线上均截取 1.7724539 英寸，然后把这两个点连接起来.

解出了! 你现在得到了一个与已知圆面积相等的正方形了. 当然，你可能感到不安，你的测量工具并非无限精确的，而你所使用的 $\pi$ 的值也是一样，这难道不意味着与圆等积的正方形不过是近似而非精确的吗?

是的，但关键在于原则而不在于细节. 我们可以假设测量工具是完美无缺的，而所用的 $\pi$ 的值又是精确到无限数位小数. 总之，假使以我们实际划出的线段来表示理想的线段，这实在是无可非议的，考虑到我们的直尺是完全准直的，我们的圆规所划的圆的起迄点也完全吻合，从原则上来说，我们确实是将圆完美无缺地化成了正方形.

可是，我们所使用的这件测量工具，却不是高尚雅致的几何学家所允许的仅有的两件工具之中的一件，那就证明了你不过是一个无赖和粗俗之流，你就得因此而被撵出这个俱乐部.

这儿还有一种化圆为方的办法. 假设圆的半径为 1，那么你真正需要的是另一条表示 $\sqrt{\pi}$ 的线段. 如果以这样的一条线段为边长来作一个正方形，则它的面积就正好同单位半径的圆的而积相等，那么，怎么得到这样的一条线段呢? 好吧，如果你能够作出一条与半径长度的 $\pi$ 倍相等的线段，那就有办法只使用直尺和圆规作出一条其长度与那条线段的平方根相等的线段，这样就表示了我们正在寻求的 $\sqrt{\pi}$ .

要得到一条等于半径 $\pi$ 倍的线段倒是挺简单的. 根据熟

知的公式：圆周的长度等于半径乘 $\pi$ 的两倍．因此我们想象一下，要是有一个圆停在一条直线上，并在圆周与直线相切的地方作上一个小的标记，然后慢慢地转动这个圆，使它沿着直线滚动（不能有所滑动），直到刚才所作的记号绕完一周后再次与直线相切为止，在再次相切线上作另一个记号．这样，你就把圆的周长在一条直线上截取下来了，这两个标记之间的距离恰好是 $\pi$ 的两倍．

然后用平常的直尺和圆规的几何作图法把这条线段两等分，就可以得到一条等于 $\pi$ 的线段，作那条线段的平方根，你就得到了 $\sqrt{\pi}$ ．

作出啦！用这个方法事实上就把圆化成了正方形．

但是事情并非如此．恐怕你仍然得被撵出俱乐部，因为你用了一个上面标有记号的滚动圆，而这项工具又是直尺和圆规之外的另一种工具．

问题是，尽管有许多化圆为方的方法，但希腊人却无法找到只用直尺和圆规、经过有限的步数来解决这个问题的任何作图法．（他们耗费了不知多少时间来寻求一种方法．在回顾这个问题的时候，现在看来，似乎是一件毫无意义的工作，但过去却并非如此．在他们的研究中，他们发现了各种各样新的曲线，象圆锥曲线，还有新的定理．它们的价值比化圆为方本身所可能具有的价值要远远高得多．）

尽管希腊人没能找到化圆为方的方法，但这项研究却不断地继续下去，人们不断地试了又试，试了又试…….

现在让我们把话题稍为转一转．

请考虑一个简单的方程，比如：$2x-1=0$．你可以发现，

若令 $x=\frac{1}{2}$，就可以使这个方程成立，因为 $2\cdot\frac{1}{2}-1$ 确实等于零．没有其他哪一个数可以代替这个方程中的 $x$ 而使方程仍然成立．

改变上述方程里的整数（即大家所谓的“系数”），就可以令 $x$ 等于别的特定的数．比方说，在 $3x-4=0$ 中，$x$ 等于 $\frac{4}{3}$；而在 $7x+2=0$ 中，$x=-\frac{2}{7}$．实际上，只要选择适当的系数，就可以使 $x$ 的值等于任何正或负的整数或分数．

但在这样的一个“一次方程”中，所得出的 $x$ 的值只能是有理数．在 $Ax+B=0$ 这样一种形式的方程中（此处 $A$ 和 $B$ 是有理数），$x$ 是不可能等于例如 $\sqrt{2}$ 这样的数的．

我们要做的是试一试更为复杂的一类方程．假定我们试一试 $x^2-2=0$，这是一个“二次方程”，因为它包含一个平方项．如果解这个方程，就会得到其解为 $\sqrt{2}$，将 $\sqrt{2}$ 代入方程就可以使它成立．事实上，有两个可能的解，因为如果将 $x$ 等于 $-\sqrt{2}$ 代入方程，同样也可能使方程成立．

你可以建立三次方程，比如 $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$，或者四次方程（我不必给出什么例子了，行吗？）或者更高次的方程．在这些情况下要解出 $x$ 就会变得越来越困难，得到的解中将包括立方根、四次方根等等．

在任何这类“多项式方程”中，x 的值可由系数的运算求出．以最简单的情况即一次方程的一般形式 $Ax+B=0$ 为例，$x$ 的值等于 $-\frac{B}{A}$；而在二次方程的一般形式 $Ax^2+Bx+C=0$ 中，$x$ 有两个解：其一为 $\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$，另一为 $\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$．

方程的解逐渐变得越来越复杂，最后，对于五次以及五次以上的方程，尽管仍能求出它们的特殊解，却找不出它们的通解．然而，原则仍然保持不变，即在所有的多项式方程中，$x$的值可以表达成有限个整数的有限次运算．这些运算包括加、减、乘，除、求幂（乘方）和求根（开方）．

这些运算是普通代数中所用到的仅有的运算，因而称为“代数运算”，任何可以由整数经过有限个任何组合的代数运算得出的数均称为“代数数”．反之，任何代数数均为某多项式方程的可能解．

现在，问题成了所有代数运算的几何等价，除了求平方根以上的方根以外，均可仅用直尺和圆规作出．因此，如果一条已知线段表示 1，则表示任何代数数的线段（不包括高于平方根的方根）均可用直尺和圆规，通过有限步数的操作来作出．

由于 π 似乎并不包含任何立方根（或更高次的方根），它是否有可能仅用直尺和圆规来作出呢？如果代数数包括一切数字的话，也许，是可以作出的．但是否如此？是否存在着不能成为任何多项式方程的解，因而不是代数数的数字呢？

先从有理数开始吧，所有的有理数都可能是二次方程的解，因此所有的有理数都是代数数．当然，某些无理数也是代数数，因为很容易写出这样的一些方程，使它们的根是 $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt[3]{15}-3$ 之类的数．

但是否存在着这样的无理数，它们不能用作各种可能次数的无数个不同的多项式方程中任何一个方程的解呢？

1844 年，法国数学家约瑟夫 · 刘维叶（Joseph Liouville）①终于找到了一个方法来证明这些非代数数的确实存在（我并不知道他是怎么找到的，但如果有哪位读者认为我懂得这个

① 刘维叶，法国数学家，公元 1809～1887 年．译者注．

方法，我必须提醒他，别把我估计过高了；如果有谁能把这个方法给我寄来的话，这是颇受欢迎的）.

然而，在证明了非代数数确实存在之后，刘维叶却仍然举不出一个特别的例子. 他所达到的最接近的结果是证明了由符号 $e$ 所表示的一个数不可能作为任何想象得到的二次方程的根.

（说到这里，好象有什么在诱使我对 $e$ 这个数发起一次讨论，因为我在上一章开头时曾说到过一个著名的方程 $e^{\pi i}=-1$. 但是，我将不理睬这种诱惑，因为在第 3 章中我已经谈了一些关于 $e$ 的内容.）

后来到了 1873 年，法国数学家查尔斯·埃尔米特（Charles Hermite）[①]想出了一个分析的方法，用这个方法可以证明 $e$ 不可能是可以设想得出的任何次数的代数方程的根，因此实际上它不是一个代数数. 事实上，它是一个所谓"超越数"，即一个超越（也就是超过）代数运算且不能用整数通过任何有限的代数运算来获得的（那就是说，$\sqrt{2}$ 是无理数，但可以通过一次代数运算来产生，即取 2 的平方根. 另外，$e$ 的值只能通过一个无限数列，其中包括无限次加、除、减等等才能计算出来）.

用埃尔米特所研究出来的这些方法，德国数学家费迪南·林德曼（Ferdinand Lindemann）[②]于 1882 年证得了 $\pi$ 也是一个超越数.

对本章的目的来说，这一点是事关重要的，因为这意味着一条等价于 $\pi$ 的线段是无法通过只用直尺和圆规经过有限的步骤作出图来的. 不能只用直尺和圆规把圆化为等积的正方

① 埃尔米特，法国数学家，公元 1822～1901 年. 译者注.
② 林德曼，德国数学家，公元 1852～1939 年. 译者注.

形．这就好象不可能找到 $\sqrt{2}$ 的精确值，或者找到一个奇数使之精确地等于 4 的倍数一样．

关于超越数，我还想说上几句，也许这是很奇怪的：

超越数曾经是很难找到的，但一旦发现它们之后，却证明了它们的存在是无数的．事实上，任何包含 $e$ 或 $\pi$ 的表达式都是超越数，除非该式未经整理，而在整理后是可以消去 $e$ 或 $\pi$ 的；一切包含对数（其中包含着 $e$）的表达式，一切包含三角函数（其中包含着 $\pi$）的表达式都是超越数．包含无理指数的表达式，如 $x^{\sqrt{2}}$ 之类的数也都是超越数．

事实上，要是你回忆一下第 5 章的话，我曾说过，已证明代数数可以与整数建立一一对应，但超越数却不能，这你就不难理解了．

这就是说，尽管代数数是无限的，但属于超限数的最低一级，即$\aleph_0$；而超越数则至少属于比代数数高一级的超限数$\aleph_1$．因此，超越数的数目要比代数数来得多．

尽管关于 $\pi$ 的超越性的事实已经完好地建立了将近一个世纪的时间了，但这件事却仍然不足以阻止热衷于化圆为方的研究者们继续他们的研究工作，他们依然如故地继续企图用直尺和圆规来完成这件渺无希望的工作，并继续定期地报告着他们的解法．

因此，如果你知道一种可以只用直尺和圆规来化圆为方的方法，我就得向你道贺，可是你的证明中肯定在哪里会有一个错误．因此没有必要把你的结果寄给我，因为我是一个蹩脚的数学家，不可能找出你的错误在什么地方，但是我仍得告诉你，错误肯定会存在的．

# 8 并非虚幻的虚数

当我是一个瘦长少年还在学院里念书的时候，我曾有过一位朋友，我俩每天都在一起吃午饭．他上午 11 点钟的那堂课是社会学，这种课我是绝不愿意去听的．而我上午 11 点钟的那堂课是微积分，他对这种课也是毫无兴趣的．因此我们不得不每天在十一点钟的时候分手，再在十二点钟的时候碰头．

事情是这样发生的：他的社会学教授是一位处世态度傲慢的学者，每每在授课结束之后还喜欢作些高谈阔论，让比较热心的学生全围在他的四周，听他发表十五分钟题外的宏论，在那段时间里，学生们可以用提问的方式在他雄辩的火焰中随时添入一些木柴．

因此，我上完自己的微积分课之后，总是不得不到社会学课堂去，耐心地呆到教授的演讲结束为止．

一天，我走进那个课堂的时候，教授正在黑板上列出他对人类的分类．他把人类分成二部分：神秘主义者和现实主义者．他把数学家列入了神秘主义者这一部分里，和诗人、神学家并列在一起．有一位学生提问，请他解释为什么说数学家属于神秘主义者．

“因为，”教授回答说，“数学家们相信一些压根儿不存在的数．”

由于我不是这个班级的学生，所以我平常总是坐在角落里，静静地在无趣中受罪，可现在我却激动地站起来问道：“什么数？”

教授朝我看了一眼，说:“负 1 的平方根，它是根本不存在的，所以数学家管它叫虚数，可他们又相信这种数以某种神秘的方式存在着.”

“虚数根本没有什么神秘的,”我生气地说,“负 1 的平方根就跟其他任何的数完全一样的现实.”

教授微笑了一下，他觉得现在有一个活靶子可以供他卖弄他卓越的才智了（自从我自己听他的课以来，就确切地知道他当时是怎么感觉的). 他得意洋洋地说:“现在我们这儿有一位年青的数学家，他想证明负 1 的平方根的现实性，好，来吧，小伙子，请给我拿出负 1 平方根枝粉笔来!”

我的脸发红了,“嗯，那，等一下……”

“那就得了.”他挥了挥手说，他准以为，这场争论已经干净、利落地结束了.

但我提高了嗓门说:“我可以做得到的，可以做得到的，我可以给你拿出负 1 平方根枝粉笔来的，不过你先得给我拿出半枝粉笔来.”

教授又微笑了一下，说:“很好.”他把一枝新粉笔折成两半，把其中的一半交给我说:“现在，你总没有什么话可以说了吧.”

“噢，别着急,”我说,“你还没有做到这一点呢，现在你拿给我看的是一枝粉笔而不是半枝粉笔.”我把那段粉笔举起来让大家看,“你们大家说这是不是一枝粉笔? 它当然不是两枝或三枝粉笔.”

现在教授不再微笑了,“拿着! 一枝粉笔是指一枝正常长度的粉笔，而你手里的只有正常长度一半的粉笔.”

我说:“可现在你突然对我提出了一条任意解释的定义，就算我接受你这条定义，那你是不是打算坚持说，这确实是半

枝而不是 0.48 枝或者 0.62 枝粉笔呢？当你对一半的意义还弄不大清楚的时候，又怎么能认为你自己确实有资格来谈论负 1 平方根的问题呢？”

现在，那位教授完全丧失了他泰然自若的态度，对我最后的驳斥，他显然是无法回答的，他只得嚷道：“把这个混蛋撵走！”我大笑着走出了课堂．此后，我就在走道里等待我的朋友．

从那以来，已经过去了二十个年头，我觉得，现在应该来结束那场争论……

让我们从一个简单的代数方程 $x+3=5$ 说起．这个表达式中 $x$ 表示某个数，若以这个数来代替 $x$，就可以使方程的两边相等．在上述这个方程中，$x$ 必须等于 2，因为 $2+3=5$，这样我们就“解出了 $x$”．

有趣的是，这个解是唯一的解．除了 2 以外，没有一个数能够在加上 3 之后得到 5．

对这类问题来说，任何一个方程都是这样的．这种方程叫做“线性方程”（因为它在几何学上能以一条直线表示）或“一次多项式方程”．没有一个一次多项式方程，其 $x$ 可以拥有多于一个的解．

当然，还有其他一些方程是可以拥有一个以上解的．这里就是一个例子：$x^2-5x+6=0$，这里 $x^2$（读作“$x$ 平方”或“把 $x$ 平方”）表示 $x$ 乘 $x$．这种方程称为“二次方程”，“二次”（quardratic）一词来自拉丁语，意即“平方”（square），因为它包含着 $x$ 的平方．它也可以称为“二次多项式方程”，因为在 $x^2$ 中有“2”这个小字码．至于 $x$ 本身，则可写作 $x^1$，只是“1”经常被认为可以理所当然地省略不写，这就是为什么说 $x+3=5$

是一次方程．

如果以方程 $x^2-5x+6=0$ 为例，取 2 代 $x$，则 $x^2$ 为 4，$5x$ 为 10，故方程变为 $4-10+6=0$，该式成立，故 2 是方程的一个解．

但是，如果取 3 代 $x$，则 $x^2$ 为 9，而 $5x$ 为 15，这样方程就变为 $9-15+6=0$，它也是成立的，故 3 是该方程的第二个解．

现在还没有发现任何一个二次方程能拥有多于二个的解，但三次多项式方程又怎样呢？三次多项式方程包含着 $x^3$（读作“$x$ 立方”或“把 $x$ 立方”），故这类方程也称为“立方方程”．符号 $x^3$ 表示 $x$ 乘 $x$ 乘 $x$．

方程 $x^3-6x^2+11x-6=0$ 有三个解，因为可以令 $x$ 等于 1、2 或 3，代入这个方程后，每次都能够使等式成立．然而迄今为止，尚未发现任何三次方程有多于三个解的．

用同样的方法可以构成四次多项式方程，它具有四个解，但不会有更多的解；五次多项式方程有五个解，也不会有更多的解；余类推．这样，可以说，一个 $n$ 次多项式方程就可以具有 $n$ 个解，但也永远不会有超过 $n$ 个的解．

数学家们要求的是比这更美的东西．直到 1800 年左右才找到．当时，德国数学家卡尔·弗列德里希·高斯证明了每个 $n$ 次方程都有恰好 $n$ 个解，既不多，也不少．

然而，为了证实这条基本定理的正确性，我们关于代数方程解的构成概念必须极大地加以扩大．

起初，人类所接受的只有“自然数”：1、2、3 等等．对于计数客体的个数来说，这是合适的．因为客体一般仅被认为是些单位．你可以有 2 个孩子，5 条牛，或者 8 个水壶；说你

有 $2\frac{1}{2}$ 个孩子，$5\frac{1}{4}$ 条牛，或者 $8\frac{1}{3}$ 个水壶是没有多大意义的．

然而，在测量连续量的时候，比如象长度、重量等等，分数就成为必不可少的了．埃及和巴比伦人曾试图找到处理分数的方法，虽然这些方法拿我们的标准看来并不是非常有效的，但其中有些保守的学者无疑曾嘲笑过那些神秘的数学家，因为他们相信存在着象 $5\frac{1}{2}$ 那种既非 5 又非 6 的数字．

这种分数其实是整数之比．比如，说一块木板长 $2\frac{5}{8}$ 码，这就是说，这块木板的长度对标准码尺的长度之比为 21 比 8．然而，希腊人发现，有一些确定的数是不能表示为整数之比的．最早发现的这样的数是 2 的平方根，通常表示为 $\sqrt{2}$ ．这是这样的一个数，它自乘之后就能得到 2，这样的数确是存在的，但它却无法表示为一个比值，因此它是一个“无理数”．

从前，对于数的概念仅扩展到此为止．这样，希腊人是不接受比零更小的数的．怎么能比“无”更小呢？因而，在他们看来，方程 $x+5=3$ 是没有解的．怎么能把 5 加到一个数上，得出 3 这个结果呢？即使把 5 加到最小的数（即零）上去，所得的和也是 5，如果把 5 加到别的任何数（它总是大于零的）上去的话，所得到的和总是大于 5 的．

第一位打破这条戒律并对小于零的数作出系统使用的是意大利人基洛拉莫·卡尔达诺（Girolamo Cardano）．总之，存在着可以比无更小的事物，债务就是一件比无更小的事物．

如果你在世界上拥有的全部财产是两元钱的债务，那你就比无少了两元钱．如果后来有人给了你五元钱，结果你自己就有了三元钱（假定你是一个肯还债的老实人），因此，在

$x+5=3$ 这个方程中，可令 $x$ 等于$-2$，其中负号表示一个小于零的数.

这样的数称为“负数”，这个词来自一个拉丁词，其意义为“否定”. 这样，这个名称本身就带上了希腊人否定这种数的存在的痕迹. 比零更大的数称为“正数”，它们可以写成$+1$，$+2$，$+3$ 等等.

这样，就从一个实际的问题出发，把数字系统进行了扩展，使它包括了负数，从而简化了各种各样的计算. 举例说，簿记中的计算就能简化了.

从理论的角度出发，使用负数意味着每个一次方程都恰好有一个解，既不多，也不少.

如果我们继续研究二次方程，就会发现，对于方程 $x^2-5x+6=0$，希腊人将会同意我们，说它有两个解：2 和 3. 然而，对于方程 $x^2+4x-5=0$，他们会说它只有一个解：1，以 1 代 $x$，则 $x^2$ 为 1，而 $4x$ 为 4，故方程变为 $1+4-5=0$，要是我们把自己局限在正数范围的话，那么这个方程确实再没有其他的数字来作为它的解了.

然而，如果给出几条与负数的乘法有关的规则，则我们可以认为数字$-5$ 也是这方程的一个解. 为了得出符合实际的结果，数学家们决定让负数乘正数得到负数的积，而负数乘负数则得出正数的积.

若在方程 $x^2+4x-5=0$ 中，以$-5$ 代 $x$，则 $x^2$ 成为$-5$ 乘$-5$ 得$+25$，而 $4x$ 则成为$+4$ 乘$-5$，得$-20$；方程变为 $25-20-5=0$，它是成立的. 此时我们就可以说，该方程有两个解：$+1$ 和$-5$.

有时，一个二次方程看来确实只有一个解. 举例说，方程

$x^2-6x+9=0$，如果将$+3$代$x$而且只有将$+3$代$x$，则等式成立．然而，方程解的结构表明，事实上它确有两个解，但这两个解恰好相等．这样，方程$x^2-6x+9=0$就可以改写为（$x-3$）（$x-3$）$=0$．从每个（$x-3$）均能得出一个解，因此该方程的解为$+3$和$+3$．

如果在数字系统中包括了负数，且我们允许偶然出现的两重解，那么能不能说所有的二次方程均能证明恰好具有两个解呢?

可惜不能！考虑一下方程$x^2+1=0$．首先，必须令$x^2$等于$-1$，因为以$-1$代$x^2$，则方程成为$-1+1=0$，这完全是成立的．

但要使$x^2$等于$-1$,则必须使$x$等于著名的负1的平方根（$\sqrt{-1}$），就是那个引起我同那位社会学教授之间的一场争论的东西．负1的平方根是这样的一个数，当它自乘时，可以得到$-1$．但在正数和负数的集合中是没有这个数的，这就是社会学教授嘲笑这个数的理由．首先，$+1$乘上$+1$等于$+1$，其次，$-1$乘上$-1$还是等于$+1$．

为了让方程$x^2+1=0$好歹能有解，先别去管它是否有两个解．都必须越过这个路障．如果没有一个正数，也没有一个负数能够成为这个方程的解，那就完全有必要定义一种全新的数，一种虚数，如果你喜欢这么说的话；这个数的平方等于$-1$．

如果愿意的话，我们可以给这种数以一个特别的记号，我们已经用了加号来表示正数，用减号来表示负数，现在我们可以用一个星号来表示这种新的数，并且说：*1（“星号1”）乘*1等于$-1$．

然而，我们却并没有这么办．瑞士数学家利昂纳德·欧勒

于 1777 年引入了符号 $i$ 即“虚”(imaginary)，来表示这种新的数，此后这个符号就被广泛采用了．这样，我们就可以写成：$i=\sqrt{-1}$，或 $i^2=-1$．

对 $i$ 下了这样的定义之后，我们就可以用它来表示任何负数的平方根．比如，$\sqrt{-4}$ 能写成 $\sqrt{4}$ 乘 $\sqrt{-1}$，或 $2i$．一般说来，任何负数的平方根 $\sqrt{-n}$ 都可以写成相应的正数平方根乘以负 1 的平方根，即：$\sqrt{-n}=\sqrt{n}\,i$

用这样的方法，我们可以把整个虚数的数列描绘成完全类似于普通的数或“实数”的数列．对实数 1，2，3，4，…，可以写出虚数 $i$，$2i$，$3i$，$4i$，…，这也可以包括分数，因为 $\frac{2}{3}$ 可以与 $\frac{2i}{3}$ 相对应，$\frac{15}{17}$ 可以与 $\frac{15i}{17}$ 相对应，等等；它也能包括无理数，因为 $\sqrt{2}$ 可以与 $\sqrt{2}\,i$ 相对应，即使象 $\pi$ 这样的数也能与 $\pi i$ 相对应．

这些是正数与虚数的全部的比较．它与负数又如何相比较呢？好吧，为什么不能有负的虚数呢？对于 $-1$，$-2$，$-3$，$-4$，…，可以有 $-i$，$-2i$，$-3i$，$-4i$，…，与之相对应．

这样，我们就有了四类数：（1）正实数，（2）负实数，（3）正虚数，（4）负虚数（将一个负虚数乘上一个负虚数，其积为负数)．

将数字系统作这样地进一步扩展，我们可以发现方程 $x^2+1=0$ 的两个必要的解，它们是 $+i$ 和 $-i$．首先，$+i$ 乘以 $+i$ 等于 $-1$；其次，$-i$ 乘以 $-i$ 等于 $-1$．故在这两种情况下，方程都变成了 $-1+1=0$．等式成立，

事实上，可以使用同样的数字系统的扩展来找到象 $x^4-1=0$ 这样一个方程的所有四个解．这些解是 $+1$、$-1$、$+i$、$-i$．为了说明这一点，我们必须记住，任何数的四

次幂等于该数平方的自乘积，即 $n^4$ 等于 $n^2$ 乘上 $n^2$.

现在，让我们把所提出的四个解逐一代入方程，则 $x^4$ 分别等于：$(+1)^4$，$(-1)^4$，$(+i)^4$ 和 $(-i)^4$.

首先，$(+1)^4$ 等于 $(+1)^2$ 乘以 $(+1)^2$，由于 $(+1)^2$，等于 $+1$，该式变为 $+1$ 乘 $+1$，其积仍然为 $+1$.

其次，$(-1)^4$ 等于 $(-1)^2$ 乘上 $(-1)^2$，由于 $(-1)^2$ 亦等于 $+1$，故上式仍然变为 $+1$ 乘以 $+1$，或仍为 $+1$.

第三，$(+i)^4$ 等于 $(+i)^2$ 乘上 $(+i)^2$，由于我们规定 $(+i)^2$ 等于 $-1$，故上式变为 $-1$ 乘以 $-1$，其积为 $+1$.

第四，$(-i)^4$ 等于 $(-i)^2$ 乘以 $(-i)^2$，它也等于 $-1$ 乘以 $-1$，其积为 $+1$.

以上提出的所有这四个解在代入方程 $x^4-1=0$ 时，都能得到下式：$+1-1=0$，该式是成立的.

在数学家看来，在谈论到虚数时似乎一切都很顺利．只要某些已定义的数字遵守与数字系统中的其他一切规则并不矛盾的运算规则，数学家就感到高兴了．对于它“意味着什么”他们并不真正在乎.

但是普通的人却很在乎，就是因为如此，那位社会学家才把数学家指责为神秘主义者.

然而，给所谓的“虚数”赋予真正的现实和具体的意义，这是世界上最简单不过的事．只要想象一条水平的直线与一条垂直的直线相交，把交点称为零点，现在就有了四条从零点出发的射线，共同构成一个直角，你可以把这些直线与四种数字等价起来.

如果在向右的那条射线上每隔相等的间隔就标以记号，这些记号就可编上 $+1$，$+2$，$+3$，$+4$，…等等的数字，一直

编到要多远就多远，只要我们把直线画得足够长即可．在记号与记号之间是所有的分数和无理数，事实上，可以表明，这样直线上的每个点都相应于一个而且唯一的一个正实数，而对每个正实数，在直线上也可以找到一个而且唯一的一个点．

向左的那条射线可以类似地用负实数来作上记号，这样，水平线就可以认为是“实数轴”，包括正实数和负实数．

同样，向上的那条射线可以用正虚数来作记号．向下的那条射线可以用负虚数来作记号，这样，垂直线就可以作为虚数轴．

假定我们并不利用通常的记号和符号，而是用直线所指的方向来标明不同的数字．正实数的朝右的射线可以称为东，因为在一般的地图上这个方向正好是东方，朝左的负实数的射线称为西；向上的正虚数的射线为北，而向下的负虚数的射线为南．

### 利昂纳德·欧勒

欧勒是一位基督教加尔文派教长的儿子，1707 年 4 月 15 日诞生于瑞士巴塞尔．十六岁时，他就取得了巴塞尔大学的硕士学位．

1727 年，欧勒到了俄国的圣彼得堡，卡德琳娜（Catherine）一世——彼得大帝（peter the Great）[①]的遗孀刚在那儿建立了彼得堡科学院．欧勒在彼得堡科学院度过了他一生的大部分时间．为了试图制定一种定时系统，他长期不息地观测太阳，致使他的右眼在 1735 年失明．

1741 年欧勒到柏林去领导和整顿腐败的柏林科学院，但他与

① 彼得大帝，俄国沙皇，公元 1672～1725 年，在位期间公元 1682～1725 年．卡德琳娜一世，公元 1684～1727 年，在位期间公元 1725～1727 年．译者注．

普鲁士的新君弗雷德里克二世（Fredrick）[①]相处不甚融洽，遂在1766 年再度到彼得堡工作．1783 年 9 月 18 日，欧勒在彼得堡逝世．

欧勒是个空前多产的数学家，他的著作遍及数学的各个分支．他的论证推理周密严谨，并将他所走的弯路编列成表．1766 年，欧勒剩下的另一只眼睛也终于失明，但这几乎丝毫未能阻挡和减缓他的写作速度，因为他有着非凡的记忆力，可以记住整整几黑板的演算．他共计出版了八百篇论文，其中有些篇幅很长，在他逝世以后，遗下的论文让印刷出版界足足忙了三十五年之久．

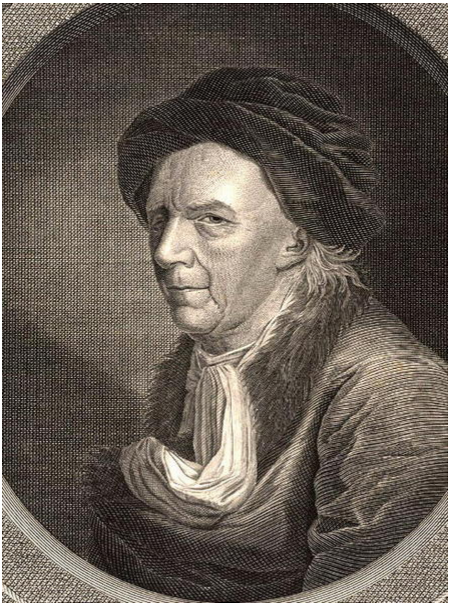


图 14 欧勒象

欧勒在 1768 年出版过一本极为成功的科普读物，这本书一连发行了九十年之久．

他逝世前不久刚研究了某个与汽球飞行有关的数学问题，这是在蒙高飞（Montgolfier）兄弟[②]乘坐汽球飞行成功之后受到启示而写的．他引入了“$e$”作为自然对数的底的符号，“$i$”作为负 1 平方根

① 弗雷德里克二世，普鲁士国王，公元 1712～1786 年，公元 1740～1786 年在位．译者注．

② 蒙高飞兄弟，约瑟夫 · 米歇尔 · 蒙高飞和雅各 · 埃坦 · 蒙高飞，法国人，1782 年发明热空气气球．生卒年份分别为公元 1740～1782 年，1745～1799 年．译者注．

的符号，“$f()$”作为函数的符号．

现在，如果我们同意＋1 乘＋1 等于＋1，并且我们集中思想于象我刚才已定义的那样用罗盘上的字符来考虑问题，则我们就可以说东乘东得东．又由于－1 乘－1 也等于＋1，故西乘西亦得东．接下来，由于＋$i$ 乘＋$i$ 等于－1，而－$i$ 乘－$i$ 亦等于－1，故北乘北等于西，南乘南亦得西．

我们也可以再作一些其他的组合，比如－1 乘以＋$i$ 等于－$i$（由于正乘负得到负的积，即使在虚数的情况下也是如此），故西乘北得南．如果我们把罗盘上的各点的所有可能的组合全部列出，用文字来写出这些点，就可以列出下面这个表格：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 东×东＝东 | 东×南＝南 | 东×西＝西 | 东×北＝北 |
| 南×东＝南 | 南×南＝西 | 南×西＝北 | 南×北＝东 |
| 西×东＝西 | 西×南＝北 | 西×西＝东 | 西×北＝南 |
| 北×东＝北 | 北×南＝东 | 北×西＝南 | 北×北＝西 |

我们得到一个极有规律的模式：罗盘上的任何一点乘以东总是保持不变，故以东作乘数的话，就表示旋转 0°．其次，罗盘上的任何一点乘以西则旋转 180°（“向后转”），北和南表示转过一个直角．乘以南得出顺时针向转动 90°（“向右转”），而乘以西则得出逆时针向转动 90°（“向左转”）．

现在，方向不变恰恰是最简单的排列，故东（正实数）比起其他各种数字来说，都要更易于掌握，也更能让脑子感到舒服些．西（负实数）得出向后的旋转，但至少仍然保持在同一条直线上，它当然是不那么舒服的，但总算还过得去．北和南（虚数）会把你带到一个新的方向去，这是最不舒服的．

但从罗盘上的点来看，你可以发现，没有哪一种数集合比其他的数集合来得更“虚”些，或者说，由于这个缘故，没有哪一种数集合比其他的数集合来得更“实”些.

现在可以考虑一下，这两条数轴的存在是多么有用．如果只考虑实数，那么我们就只能沿实数轴向前或向后作一维移动．如果只使用虚数轴，则只能同样沿虚数轴作上下移动.

同时使用这两条轴，我们就可以在实数轴上右行或左行到某个地点，并在虚数轴上上行或下行到某个地点来确定一个点．这样就可以指定由两条轴所构或的四个象限之一中的某个点．这恰恰就是用经度和纬度将地球表面的某个点定位的方法.

我们可以这样来说一个数，比如$+5+5i$，它代表沿实数轴朝东数上五个单位，接着朝北数上五个单位后到达的那个点．你也可以得到$-7+6i$，或$+0.5432-9.11i$，或$+\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$这样一些点.

把实数和虚数的单位结合起来的这样一些数称为“复数”.

使用两条数轴之后，平面内（而不仅是直线上）的任何一点都可以使之与一个而且唯有一个复数相对应；而每个可设想的复数也能且仅能与平面内的一个点相对应.

事实上，实数本身仅是复数的特殊情况，从这一点看来，虚数也是一样．如果你用$-a+bi$的形式来表示所有复数的话，则实数就是$b$恰好等于零的所有那些复数；而虚数则是$a$恰好等于零的所有复数.

用复数平面来代替实数的直线，其用途对数学家来说是无可估量的.

例如，只有在把复数解考虑在内时，多项式方程的解的个数才与它的次数相等，如果仅考虑实数解或虚数解则不然. 例如 $x^2-1=0$ 的两个解是 $+1$ 和 $-1$，可以写作 $+1+0i$ 和 $-1+0i$；$x^2+1=0$ 的两个解是 $+i$ 和 $-i$ 或 $0+i$ 和 $0-i$；$x^4-1=0$ 的四个解是刚才所列的四个复数.

在所有这些非常简单的例子中，包含着零的复数可以简化为不是实数就是虚数. 然而，情况并非总是这样. 在方程 $x^3-1=0$ 中，一个解当然是 $+1+0i$（它可以简单地写成 $+1$），但另外两个解却是 $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$ 和 $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$.

胸怀大志的亲爱的读者，请您不妨把上面这两个解来立方一下（如果您还记得代数多项式乘法的话），要是确能得出 $+1$，您就可以心满意足了.

复数还有着它重要的实际意义. 许多熟悉的度量都涉及到“标量”，它们只有大小之分. 某一体积大于或小于另一个；某一重量大于或小于另一个；某一密度大于或小于另一个. 从这一点来说，某项债务亦可以大于或小于另一项，对于所有这样的度量，只要正的和负的实数就足够了.

然而，还存在着既有大小又有方向的“矢量”. 一个速度与另一个速度不仅大小可以不同，而且方向也可以不同. 力、加速度等也是如此.

对于这样的矢量，在数学处理中，就必须用到复数了，因为复数既包含着大小也包含着方向（这就是我用四种数字比拟于罗盘上方位点的理由）.

那么，当那位社会学教授要求拿出“负 1 平方根枝粉笔”的时候，他所说的只是标量的现象，它只需使用实数就足够了.

在另一种情况下，要是他问我如何从他的课堂走到校园里的某个地方去，这时如果我回答说："走二百码"的话，他很可能会大发脾气，他很可能会恼火地问："朝那个方向走？"

现在，你可以明白了，对那些实数不足以解决的问题，必须牵涉到矢量．我只要这样说就可以使他满意了："朝东北走二百码"．这种说法同"走 $100\sqrt{2}+100\sqrt{2}i$ 码"是等同的．

因为不能使用复数来数粉笔的枝数，就把负 1 的平方根看作是"虚"的，这实在是很可笑的．这正象 200 这个数字，因为只用它本身不能表达一点相对于另一点的位置而把它看作是"虚"的一样荒唐．

# 第三部分

# 数和度量衡

# 9 忘　掉　它！

几天前，我把一本新的生物学教科书（《生物科学：生命的探索》，由一些特约撰稿者编写，1963 年由 Harcourt，Brace & World 公司出版）通读了一遍，发觉它写得十分动人．

可是不幸得很，我先把该书的前言读了一遍（我是那种喜欢先读前言的人），这一来，就使我深深陷入了忧虑之中．现在不妨把前言的最前面两段文章在这儿摘录几句吧：

“我们的科学知识每隔一代便增加五倍……以目前科学进展的速度来看，我们今天重要的生物学知识大约是 1930 年的四倍，是 1900 年的十六倍，以这样的速度增长下去，到 2000 年左右，生物学所‘包含’的知识就将为本世纪初的一百倍．”

可以想象，这些话多么叫我感到不安．我在科学上是一个职业“赶形势的人”，在我比较狂热、奔放、得意的时候，我甚至以为我的工作是干得挺成功的呢．

在我读到上面所摘录的那些文字的时候，我觉得世界好象在我的身边崩溃了，我并未赶上科学的发展，槽糕的是，我根本无法赶上它．更槽糕的是，我正在一天比一天更落后于科学的发展．

最后，在我为自己叹息得够了之后，我也专心致志地为整个世界忧虑了好一阵子．人类将变得怎么样呢？我们将会变得更加视死如归．不久以后，我们都会死于有害健康的教育，让种种事实和概念塞满我们的脑细胞，达到无法消化的地步，让我们的耳边爆发出阵阵资料的暴风．

但是，事有凑巧，就在我读《生物科学》前言的那一天，碰巧我也见到了一本老掉了牙的旧书，书名是《派克算术》. 至少，在书脊上是这么写的. 在扉页上，这本书的书名就写得稍为详细一点，因为在那个对代，书名不过是书名而已. 扉页上的标题是这么写的："为美国公民之用而编写的一本算术全书，硕士尼古拉 · 派克（Nicolas Pike）著". 它于 1785 年初版，我读的那个版本是"第二版增订本"，于 1797 年出版.

那是一本篇幅超过五百页的巨著，密密麻麻地印满了小号字体，没有任何插图、表格之类能叫人喘口气的东西. 它是结结实实的一大块讲解算术的文章，只有在书末才附了几小段介绍代数和几何知识的文字.

我心里迷茫了. 我有两个孩子在小学念书[①]（而我本人也曾经在小学念过书），我知道今天的算术书是什么样子的. 它们的篇幅一点也不象这本书那样大，书的字数甚至不到派克著作的五分之一.

是不是我们删除了些什么内容呢?

因此我就把派克的书从头至尾读了一遍，你知道，我们确是删除了一些东西，而那样做一点也没有什么弊病. 糟糕的是，我们所删除的内容实在还不够多.

比如，在第 19 页上，派克花了半页篇幅开列了一张用罗马数字表示的数目表，表中的数字一直列到五十万这么大.

阿拉伯数字在中世纪全盛时期传入欧洲，一旦它们出现之后，罗马数字便完全销声匿迹了（见第 1 章）. 罗马数字失去了一切可能的用途，阿拉伯数字比它们不知道要胜过多少倍.

① 本文初版于 1964 年 3 月，随着岁月的流逝，现在我的第二个孩子也已经在大学里学得不错了. 原注.

直到此前，为了表达用罗马数字来计算的方法，谁知道得用去多少令纸张啊．而从此之后只需百分之一的纸，就可完成同样的计算，而我们除了一些无用的规则之外，并没有失去什么知识．

然而，在罗马数字判处死刑五百年之后，派克仍然把它们收编在册，还要求他的读者学会把这两种字数相互转译，尽管他没有说明如何运用它们．事实上，在派克以后的近二百年中，罗马数字仍然在学校中传授着．我的小女儿现在就在学习罗马数字呢．

但是，为什么还要学习它们呢？哪些地方用得到它们呢？的确，你可以在街角石、墓碑石，钟面、一些公共建筑物和文件上找到罗马数字，可它压根儿不是必不可少的．它仅仅用在陈列、等级，用于古色古香以及某种仿古典主义的情调中．

我敢这么说，确有一些多愁善感的人，他们感到有关罗马数字的知识乃是学习历史和文化的一种入门，如取消罗马数字，就可能有点象废弃巴台农神庙[①]里遗留下来的东西那样．但我对这种令人厌恶的东西却毫无耐心．照这种想法，我们也完全可以要求，每个人在学习驾驶汽车时也都得花一些时间去学习福特T型汽车的方向盘，以便获得一些早期汽车的情调．

罗马数字吗？忘掉它吧！省下些篇幅来写点新的有价值的材料吧．

但我们是不是敢于忘掉一些东西呢？为什么不呢？我们已经忘掉了很多，比你所想象的还要多．我们的麻烦不是出在我们已忘掉的事实，而是出在我们把它们记得太牢了，我们忘记得还不够多．

---

① 这是希腊雅典祭雅典娜女神的神庙．译者注．

派克书中的大量内容乃是我们还没有彻底忘掉的东西．这就是为什么现代算术书比派克的书来得简短．如果我们能把有些东西忘记得一干二净的话，那么现代的算术书还可以写得更简短些．

比方说，派克把很多页的篇幅用于表格，用于那些他认为读者应当非常熟悉的大概很重要的表格．他的第五张表格的标题是“布的度量”．

你是否知道$2\frac{1}{4}$英寸是一“奈尔”（nail）呢？当然啦，是这样．16 奈尔等于 1 码，而 12 奈尔则等于 1 埃尔（ell）．

不，请等一会．那 12 奈尔（27 英寸）等于的是一个佛兰芒埃尔；而一个英国埃尔要等于 20 奈尔（45 英寸），一个法国埃尔要等于 24 奈尔（54 英寸）；另外，一个苏格兰埃尔等于 16 奈尔零$1\frac{1}{5}$英寸（$37\frac{1}{5}$英寸）呢．

现在，如果你打算进入商界，做些布匹进出口生意的话，你就得知道所有这些埃尔，除非你能想出什么法子来把这些埃尔全部从商业中清除出去．

除了布匹之外，差不多每件货物都要用它自己的单位来计量．你说一小桶（firkin）黄油、一钵子（punch）洋李脯、一福特（fother）铅、一唡（stone）铺子里的肉等等．这些单位表示一定磅数的重量（指常衡磅，此外还有金衡磅和药衡磅①等），派克详细地列出了所有这些单位的等价法．

你想不想测量距离呢？好吧，不妨看一下：$\frac{712}{100}$英寸等于 1 令克（link），25 令克等于 1 杆（pole），4 杆等于 1 测链

① 常衡磅，以 16 盎司（英两）为一磅．金衡磅、药衡磅均以 12 盎司为一磅．译者注．

(chain)，10 测链等于 1 佛浪（furlong)，8 佛浪等于 1 英里.

或许，你想计量一下淡鲜啤或者啤酒吧？在殖民地时代[①]，这是件很普通的事．当然，你得懂得这种语言，这就是：2 品脱(Pint)等于 1 夸脱(quart)，而 4 夸脱等于 1 加仑(gallon)．是啊，不管怎么说，直到今天我们还在用着．

然而，在殖民地时代，十足的一加仑啤酒或淡鲜啤还只是最起码的呢，那不过是孩童之量，你还得知道怎么说成人之量．请看：8 加仑等于 1 小桶，即等于“伦敦的一小桶鲜啤酒”．然而，取 9 加仑等于伦敦的“一小桶啤酒”．中间量是 $8\frac{1}{2}$ 加仑，称为“一小桶鲜啤或啤酒”，这个单位大概是在伦敦郊区以外的地方使用的，那儿的老乡们对于区分这两者是并不讲究的．

再往下说吧：2 小桶（我假定是中间的一种，但我说不准是否真是这种），等于 1 桶（kilderkin)，2 桶等于 1 琵琶桶（barrel)．接下来是：$1\frac{1}{2}$ 琵琶桶等于 1 中桶（hogshead)，2 琵琶桶等于 1 大桶（puncheon)，3 琵琶桶等于 1 特大桶（butt)．

你有没有把这些都搞清楚了？

如果你还有胃口再了解些更好的东西的话，让我们再来试试干量．

这儿，2 品脱等于 1 夸脱，2 夸脱等于 1 壶（pottle)（请注意，不是瓶，而是壶，你不会从来没听说过壶吧！)，让我们继续说下去．

接下来，2 壶等于 1 加仑，2 加仑等于 1 配克（peck)，4 配克等于 1 蒲式耳（bushel)（现在，请你深深地透口气吧)．然后，2 蒲式耳等于 1 斯突拉克（strike)，2 斯突拉克等于 1 库

① 指美国独立前为英国殖民地的时代，亦称十三州时代．译者注．

姆（coom），2 库姆等于 1 夸特（quarter），4 夸特等于 1 却尔特伦（chaldron）（虽然在伦敦这个消费城市里，要 $4\frac{1}{2}$ 夸特方才等于 1 却尔特伦）. 最后，5 夸特等于 1 韦（wey），2 韦等于 1 拉斯脱（last）.

以上这些内容都不是我自己编造出来的，而是直接从派克书上的第 48 页抄录下来的.

那么，1707 年的时候学习算术的人是否需要把这一切全记住呢？当然是啰，因为派克用了那么多的时间来讲解复合加法，千真万确，复合的加法.

你可知道，你平时所认为的那种加法只不过是“简单加法”而已，复合加法是比这更难的一些加法. 现在我就来给你解释什么是复合加法.

假如你有 15 个苹果，你的朋友有 17 个苹果，一位过路的陌生人有 19 个苹果，你打算把这些苹果聚成一堆，聚拢以后，你还想知道这里一共有多少个苹果. 如果不喜欢把它们数一下的话，你就会用在学校受教育时学到的知识来把它们相加起来：15+17+19. 你先从个位数开始加，得到 5+7+9＝21，然后把 21 除以 10，得到商为 2，加上余数 1，因此你就写下余数 1，把商 2 进入十位数……

我好象听到读者中间发出了一阵响亮的喊声，一阵火气很大的责问声：“这算什么意思:”“这种‘除以 10’之类的废话是何从而来的？”

## 码尺

码尺是我们大家都理所当然地认为生活中不可缺少的物件之

一，但是却很少有人了解，码尺的产生曾经遇到了多少困难；在形成码尺之前，曾有过多少个敏锐的思想.

古时候，测量长度的自然方法是采用人体的各个部分来达到度量的目的．我们今日在量马的身高时，仍然说它是多少“掌”（hand）高．我们还用“指距”，即手掌张开时，大拇指和小指两端的距离来度量长度；“肘尺”（cubit）这个单位来自一个拉丁词，意即“肘”(elbow)，等于指端到肘部的跟离；“码”(与“围长”有关)，指鼻子到指尖的拒离，或者指一个男人的腰围长度.

使用人体各部分作为度量工具，其麻烦在于这些部分的长度因人而异．从我的指尖到鼻子的长度接近一码，但我的腰围就大大超过一码.

最后，人们想到应当建立一把“标准码尺”，至于你自己的尺寸如何就可以不管了．据传，一码的标准长度最初取自英王亨利（Henry）一世[①]的指端到鼻子的距离．据推测，一英尺的标准长度则是查理曼（Charlemagne）大帝[②]的脚长为依据的.

自然，英国国王不可能挨村挨户去用他的鼻子和指尖的距离度量布匹，因此就把一根木棍放在他面前，把他的鼻子和指尖在棍子上下作两个记号，这两个记号之间的距离就作为一个标准码尺．再用这把标准码尺来量其他的木棍，制造一个副标准码尺，送到各个村子，用来校核当地商人们的长度测量.



图 15 码尺

---

① 亨利一世，公元 1068～1135 年，在位期间公元 1100～1135 年．译者注.

② 查理曼大帝，公元 742～814 年，公元 768～814 年为法兰克王．译者注.

啊！亲爱的读者们，可是你在每次作加法的时候确实是这么做的．全靠那些设想出我们以十为基数的阿拉伯数字系统的善良的人们，方才使我们在将任何一个二位数除以 10 的时候，第一个数字恰好表示商，第二个数字恰好表示余数．

由于这个原因，一旦不用除法运算，我们手中有了商和余数，那末我们就可以自动地相加．如果个位数加起来是 21，我们就记下 1 进 2；如果个位数相加得到 57，我们就可以记下 7 进 5，等等．

提醒你一下，这么做唯一的理由是，在把一系列的数字相加时，每一列数字（自右向左算下去）表示一个比前一列大十倍的数字，最右边的一列是个位数，其左边的一列是十位数，再左边的一列是百位数，余类推．

正是这种十进制数字的组合，其每一列数字与相邻一列数字的比值是十，才使加法变得极其简单．由于这个缘故，所以派克把它称为“简单加法”．

现在，假定你有 1 打零 8 个苹果，你的朋友有 1 打零 10 个苹果，一位过路的陌生人有 1 打零 9 个苹果，把这些苹果堆在一起，这样来相加：

| | |
|---|---|
| 1 打 | 8 个 |
| 1 打 | 10 个 |
| 1 打 | 9 个 |

由于 $8+10+9=27$，我们是否也记 7 进 2 呢！根本不是．因为一打里有 12 个，故“打”的列与“个”的列的比值不是 10 而是 12．由于我们所用的数制是以 10 为基数而非以 12 为基数，因此，我们就不能再让原来的进位方法支配我们的思想，我们得兜上一个大圈子才行．

如果 8＋10＋9＝27，则必须用列与列之间的比值来除它们，在此情况下，这个比值是 12．我们知道，27 除以 12 得商为 2，加上一个余数 3，因此我们记 3 进 2，在打的一列中我们就得到 1＋1＋1＋2＝5．因此，苹果的总数是 5 打零 3 个．

凡是使用非 10 的列与列之间的比值的，在做加法时实际上就得做除法，这时你所做的就是“复合加法”．在把 5 磅 12 英两和 6 磅 8 英两相加时，就要遇到复合加法，因为 1 磅等于 16 英两；在把 3 码 2 英尺 6 英寸和 1 码 2 英尺 8 英寸相加的时候，也要遇到类似的情况，因为 1 英尺有 12 英寸，3 英尺为 1 码．

如果愿意的话，你可以做上面第一个问题，让我来做第二个．首先，6 英寸加 8 英寸等于 14 英寸，14 除以 12 等于 1 余数为 2，故记 2 进 1，在英尺这一列中，2＋2＋1＝5．5 除以 3 得 1，余数为 2，故记 2 进 1．在码这一列中，可得 3＋1＋1＝5．故答案为 5 码 2 英尺 2 英寸．

我们的数制既然已经如此牢固地以十为基数，那末，当今世界上我们的单位比率为什么又搞得这样变化多端呢？人们有许多理由（这些理由在当时都是有根有据的）来采用象 2，3，4，8，12，16 和 20 这样一些特殊的比率，但是，我们今天的确已经是相当先进和富于经验的了，可以使用 10 作为唯一的（或者几乎是唯一的）比率．如果我们可以这么办，我们就可以十分愉快地把复合加法、复合减法、复合乘法，复合除法等等统统忘掉（当然，它们也是存在的）．

的确，有时大自然也会使十进制不是到处都可以通用的．在测量时间时，年和月有它们自己的长度，这些长度是由天文条件决定的．因此这两种时间单位都是无法废弃的．类似象

这种特殊场合，复合加法以及其他的复合运算就不得不保留下来，这有什么办法呢．

但是：会不会有人怒气冲冲地说我们非得使用小捅、罐和佛兰芒埃尔之类的单位来度量事物不可呢？这些单位都是人为的测量方法，我们必须记住，测量为人所用，并非人为测量所用．

在当今世界上，同样也产生了一种唯一地以十为基础的度量衡制度，它称为公制．除了在某些说英语的国家如美国和英国以外，公制在文明世界到处通用．

由于不采用公制，我们要学习自己的度量衡制，结果什么收获也没有，一样也得不到，我们浪费了时间．时间损失（这损失的确是高代价的）是我实在难以想象用什么东西可以补偿的．（当然，要更换现行的仪器和工具确实是代价很高的，但是，如果我们在一个世纪之前就象我们应当做的那样做了，那就完全不会付出这样高的代价．）

当然，有那么一些人，他们反对打乱我们长期沿用下来的、对之已有感情的度量衡制，他们已经废弃了库姆和却尔特伦这样一些单位，但是又认为英寸、英尺和品脱、夸脱、配克、蒲式耳之类的单位比米和升等来得更为“简单”或者更为“自然．

甚至有些人会觉得在公制中有些东西洋得和激进得近乎危险（就是为了那个已经消失了的耻辱之词“雅各宾党”[①]），然而，带头者却是美国．

1786 年，在法国革命[②]之前十三年设计出公制，托马斯·杰斐逊（Thomas Jofferson）[③]（至少，按拥护联邦主义者的说

① 1789 年法国资产阶级革命时的一个激进党派．译者注．

② 指 1789 年至 1794 年的法国资产阶级革命．译者注．

③ 托马斯·杰斐逊，公元 1743～1826 年，于 1801～1809 年任美国第二任总统．译者注．

法是一个臭名昭著的“雅各宾党”）看到，他的一条建议为襁褓中的美国所采纳．这个国家建立了一个十进制的币制．

我们在此前所使用的一直是英国的币制，那是一种可怕而又奇特的东西，只须指出它是如何的乖戾就行了．我得说，英国人民好多世纪来就有一种值得称道的耐心，教会他们自己来忍受任何东西，只要它是“传统的”，而现在对他们的货币也感到讨厌和不耐烦了，他们正在争论如何把它改变为十进制（只是对改变的具体细节尚未达成一致的意见）[①]

请看英国一贯使用的币制，从小到大是：4 法兴（farthing）等于 1 便士（penny），12 便士等于 1 先令（shilling），20 先令等于 1 英镑（pound），此外，实际上还有一大堆名目繁多的钱币，其中有些钱币甚至并不存在，比如：半便士、三便士、六便士、克朗（crown）、半克朗、弗罗林（florin）、畿尼（guinea），还有老天爷才知道的其他东西．这些东西使英国儿童的智力变得畸形发展，而当来访的旅行者试图克服货币的困难时，英国商人就可以乘机大赚其钱．

毋须说，派克详细地叙述了如何掌握英镑、先令和便士，他的那些指导也确是别出心裁的．比如，请把 5 英镑 13 先令 7 便士除以 3，要快！

在美国，最初建立的币制是这样的：10 密尔（mill）等于 1 分，10 分等于 1 角，10 角等于 1 元，10 元等于 1 金币（背面有鹰徽的）．目前，现代美国人在计算时只用分和元．

结果如何呢？美国的钱币可以表示成十进制，并且可以象其他任何十进数一样来处理．一个学过十进制的美国小孩

① 本文初版后，英国也实行了变革．我 1974 年访问英国时极为失望地发现不再碰得到三便士和半克朗之类的货币了．他们同样也采用了公制，把毫不妥协的美国实际上孤零零地抛在反对阵营之中．原注．

只需教会他认识美元的记号那就一切都解决了，而在这个小孩学会这些知识的同时，另一个英国小孩还得勉勉强强地才学会三便士零半便士等于 14 个法兴．

十三年以后的 1799 年，公制问世了．可惜的是，我们原来的反英亲法情绪却未能持续到足以使我们采用公制的时候．要是我们采用了公制，我们本来是可以愉快地忘掉我们愚蠢的配克和盎司，就象我们今天乐于忘掉我们的便士和先令一样．（你究竟是情愿回到英国的币制去呢，还是喜欢我们自己的币制？）

我愿意看到全世界都采用同一种货币，到处都一样，为什么不这样呢？

我意识到这样一个事实，由于这种希望，可能有人认为把人性浇注在一个模子里以及把我看作为一个大同主义者，我也许会受到斥责．当然，我不是一个大同主义者（天知道！），我也不反对各地的风俗习惯、方言土语以及各地的饮食口味．事实上，我是主张这一切的，因为我本人也亲自设立了一个纯粹地方性的团体．我不希望保存的仅仅是那些在当时虽是相当好的，但到目前却干扰着这个周长只有 90 分钟的世界[①]中人类的正常生活的乡土观念．

如果你认为乡土观念是令人喜爱并具有人性的色彩和魅力的话，那么请让我再从派克的书中引用一些材料吧．

“联邦货币”（元和分）在派克著作的第二版问世前十一年就引进了，派克记述了建立这种币制的确切的法律条文，并详细地讨论了这种币制（他是以十进制而不是以复合加法来作讨论的）．

自然，由于除了联邦币制外，当时还有其他一些币制仍在

① 指人造卫星绕地球一圈的时间．译者注．

使用，故必须制订并规定一些标准，以便一种币制与另一种币制之间的兑换（或“折合”）. 这儿有一份清单. 我打算把派克所列的必需的折算表照本抄录如下，但实际折算标准不予列出：

I. 新罕布什尔、马萨诸塞、罗德岛、康涅狄格和弗吉尼亚货币与下列货币的折算：

1. 联邦货币
2. 纽约和北卡罗来纳货币
3. 宾夕法尼亚、新泽西、特拉华和马里兰货币
4. 南卡罗来纳和佐治亚货币
5. 英国货币
6. 爱尔兰货币
7. 加拿大和新斯科夏[①]货币
8. 法国货币（图尔利佛）
9. 西班牙密尔元（钱币上有压印花边）

II. 联邦货币与新英格兰和弗吉尼亚货币的折算.

III. 新泽西、宾夕法尼亚、特拉华和马里兰货币与下列货币的折算：

1. 新罕布什尔、马萨诸塞、罗德岛、康涅狄格和弗吉尼亚货币
2. 纽约以及……

瞧，这有多繁琐啊. 你现在明白了吗？

谁会对这一切逗人喜爱的地方风味的消失感到遗憾呢？你每次在作州际旅行时，当你需要购买物品时，不必让自己泡在不舒服的算术里面，你难道为此感到过遗憾吗？或者在类似的情况下，每当外州的来访者进入贵州，打算同你做生意的时候，你难道感到过什么不愉快的地方吗？既然如此，忘掉这

① 加拿大东部沿大西洋海岸的一省名. 译者注.

一切又是何等的令人高兴啊.

请告诉我，如果五十个州有五十套结婚和离婚的法律的话，那又有什么好处呢?

1752 年，英国和她的殖民地（大约比天主教的欧洲迟二个世纪）废弃了儒略历而采纳了在天文方面更为正确的格里历[①]（见第 11 章）. 差不多半个世纪之后，派克仍然在解答儒略历和格里历的复杂的历法依据问题的法则. 难道把儒略历忘掉有什么不好吗?

如果我们能把历法上大多数的复杂问题忘掉，采用一部合理的历法，这种历法能够把每个月的日子同每一周的日子联系起来，而且以一部简单的三月历作为永恒的历法来使用下去，每隔三个月重复一次，这不是很好的吗? 曾提出过一部世界性的历法，它可以做到这一点.

它将有助于我们遗忘大量不必要的东西.

我很愿意看到英语成为全世界广泛使用的语言. 这并不是说非得让它成为世界上唯一的语言不可，甚至也没有必要让它成为主要的语言. 只要每个人，不论他自己的语言是什么，也能够流利地说英语就行了. 这就会有助于相互交流，或许到头来，每个人都会选择说英语.

这样就可以省出很多精力来用于其他方面.

为什么要用英语呢? 那是因为一方面，在地球上把英语作为第一语言成第二语言的人要比其他任何语言的人都要来得多，这就有了第一个优先的地方; 其次，用英语报道的科学文献要远比用其他任何文字来得多，而科学的交流在今天是

① 儒略历为古罗马独裁者儒略 · 恺撒制定的历法，十六世纪为格里历所代替，后者即目前通用的阳历. 译者注.

十分重要的，在今后甚至会变得更加重要.

当然，我们应当让人们尽可能容易地学会讲英语，这就意味着我们应当让英语的拼写和语法规范化.

今日英语的拼写几乎有点象方块汉字一样. 如果只看组成英语单词的字母，什么人也不能肯定它是如何发音的. 比如象这么几个字：rough，through，though，cough，hiccough和lough[①]，你怎样把它们读正确呢？而且，有什么必要非此不行地让这个精神病似的字母组合“ough”来发出所有这些语音来呢？

要是把这些词拼写成ruff，throo，thoh，cawf，hiccup和lokh的话，看起来也许会觉得有点不严肃，但是我们不是已经把hiccough写成hiccup，看上去没有什么不严肃. 同样，我们也把colour、centre，shew和grey已经分别拼写成color、center、show和gray[②]，尽管这些拼法在英国人眼里看来也许是不严肃，但在美国却这样用了. 我们也可以将此用于其他词的拼法，可以让脑袋少受许多折磨. 如果一个人的聪明可以用拼写的熟练程度来衡量的话，我们都会变得更加聪明些，而我们却没有失掉什么东西.

## 美国钞票

美国曾向正确的方向迈开了坚定的步伐，可惜没能继续下去，这确实是令人伤心的.

美国在独立战争后不久，反英的情绪相当强烈，促使许多美国人要废除足以回想起他们仇敌的一切琐事. “英国人的权利法案”[③]

① 这些词中 ough 的发音分别为：[ʌf]、[u:]、[əu]、[ɔf]、[ʌp]、[ɔk]. 译者注.
② 这些词英美拼写法不同，前者为英国的拼写法. 译者注.
③ 指 1689 年颁布的英国资产阶级确立君主立宪的宪法性文件之一. 译者注.

并不是琐事，因此便保留而成了《人权法案》①．货币制度，无论怎样为人们熟知．但总是属于琐事．

在这一方面的一位关键人物是宾夕法尼亚州的古凡纳·毛里斯（Gouverneur Morris）②．他是一名联邦主义者，鼓吹建立一个强有力的中央政府来统一那些争吵不休、四分五裂的州．他在独立后立即组成后来被误称为“合众”的国家．他是立宪大会的一名成员，比任何人都更负责宪法的实际文字工作，并把它精炼成为一个措词清晰简洁的文件，避免浮夸的文藻和感情偏激的辞令．

他还提出建议，美国应当采用一种新的以十进制为基础的货币制度，其基本单位是“美元（dollar)”(其纸币见附图，尽管它对我们美国人来说是很熟悉的，几乎毋须再加附图)，这个名称的由来也真是说来话长．早在大约1500年，从乔金谷(Joachim's Valley)银矿（现在捷克斯洛伐克的西北部）开采出来的白银用来铸造重一英两的银币．在德文中乔金谷被称为Joachimsthal，因此这种银币被称为“Joachimsthalers”，或简称为“thalers”，在英文中被称为“dollars”．

在殖民地时代，西班牙有一种其价值与已经存在的为人熟知的美元相近的银币，西班牙人称它们为“比索”（pesos），即英语的“dollars”．美国人采用了这一名称，并于1794年开始铸造这种货币．




图16 美元纸币

① 指1789年通过的美国宪法第一次修正案．译者注．

② 美国早期政治家及外交家，公元1752～1816年．译者注．

那么语法呢？谁还需要关于“shall”和“will”，或者“which”和“that”之间由于存在着细微的区别而作无止境的争吵呢？实际上，这些问题无论怎样也是没有人能分析得有条有理的，事实说明了这种争吵是毫无裨益的．除了白白浪费宝贵的时间，除了使孩子的推理机能变得愚钝，除了把对英语的极端厌恶灌输给他或她之外，你究竟能得到些什么呢？

全如果有人认为，这样来抹煞美好的差别是会毁坏语言的．我倒想指出，在语法学家掌握语法之前，除了代词之外，英语早就在其他几乎一切场合失去了它的性和格．事实是，英语中只有一个定冠词“the”，可用于所有的性、格和时态，而法文有三个定冠词（le，la，les），德文有六个定冠词（der，die，das，dem，den，des），但这一事实丝毫没有使英语变得愚钝，它依然是一种灵活得令人赞叹的语言工具．我们钟爱自己的愚蠢，并不是因为它们确实并不愚蠢，而仅仅是我们对它们早已习以为常的缘故．

我们必须留出地盘来扩展知识，或者至少尽可能多留出些地盘来．忘掉旧的和无用的知识，无疑就跟学习新的有益的知识一样的重要．

忘掉它吧，我说，把越来越多的东西忘掉，忘掉它们吧！

可是，我干吗要这么激动呢？这是因为我说的话连一个字也没人听呢．

## 10 加上前缀

我象诸位一样仔细审视了由许多令人愉快的虚幻知识支持着的和承托着的生活，我本人特别喜爱的信条之一，就是

无可争议的公制，而普通的单位却是站不住脚的、毫无意义的大杂烩，要不是出于顽固和愚蠢，我们是不会把它们保留下来的.

然而，最近我却偶尔发现了一封来信，那是一位英国绅士写来的，他尖刻地指责公制，说它完全是人为的、缺乏思想的，而且是不适合人类需要的. 请想一下，这些话是多么叫人耳目一新啊！比如，他说（恕我不逐字逐句地引用原话），如果有人想喝啤酒，那么一品脱是再好不过的了，因为一公升太多，而半公升又太少，只有一品脱才不多不少，恰到好处①.

就我所知，那位绅士对他的乡土观念确是一丝不苟的，并且认为，他所习惯的事物必定具有自然规律的力量. 这使我不禁想起一位虔诚的女人，她执意抵制所有的外国语言，双手紧抱着她的圣经说："如果英语对于先知以赛亚②（Isaia）和使徒保罗③是完美无缺的话，那么它对我来说又有什么不好的呢？"

但这么一来，就勾起我一个想法，该写一篇谈谈公制的文章了.

为了这么做，我想先说明一下，公制的价值并不在于其基本单位的实际大小. 而在于它是一种符合逻辑的系统，这个系统的各个单位相互联系得很密切.

我所熟知的其他度量衡制，其单位都是名目繁多的，各种不同的量都使用名称毫不相干的单位，在距离方面，我们自

① 我知道你会写信告诉我：半公升是大于一品脱的，但且慢，请让我说明一下，尽管半公升大于一个美国品脱，但它却小于一个英国品脱. 原注.

② 圣经中希伯来的大预言家. 译者注.

③ 圣经中初期教会的主要领袖之一. 译者注.

已有英里、英尺、英寸、杆、佛浪[①]等等．在体积方面，我们有配克、蒲式耳、品脱、打兰（dram）[②]等等．在重量方面，我们有英两、磅、吨、格令（grain）[③]等等．在这方面看来，我们简直有点象爱斯基摩人，据说他们对于雪的名称不知有多少打的名词：正在飘落的、积在地上的、松的、紧的、湿的、干的、新下的、早已下的，各种雪都有各不相同的名称．

这时我们就看出我们自已使用形容词加名词组合的优越性了，因为这样一来，我们就可以对各种各样的雪有一个总称，而可用形容词来描述各种特殊类型的雪．比如：湿雪、干雪、硬雪、软雪等等．这到底有什么好处呢？首先，我们可以看到以前所看不到的通用性．其次，我们可以将同一个形容词用于其他名词，从而就有了一种关于"硬"字的新的通用性．例如：硬石头、硬面包，硬心肠等等．

据我所知，公制是进展到这个时期的唯一的度量衡制．

我们随便取一个长度的度量来开始吧．米（meter）这个词来自拉丁词 *metrum* 或希腊词 *metron*，两者都意为"度量"．让米作为长度的总称，这样，所有的长度单位就全都是米了．一个长度单位与另一个长度单位之间的区别只要用形容词就可以区分开了，我认为这样安排是十分妥贴的．

确实，公制中的形容词被牢牢地加到通用词的前面（我想，大概是怕因意外情况而把它们丢失掉），从面变成了前缀（是啊，亲爱的读者，在对度量衡制这样做时，这就是在"给通用词加上前缀"）．

---

① 杆，佛浪见本书第 134 页．译者注．

② 打兰，衡量名，药衡＝1/8 英两，3.888 克；常衡＝1/16 英两，1.771 克．译者注．

③ 格令，英美最小重量单位，等于 64.8 毫克．译者注．

这些前缀是从希腊文和拉丁文中得来的，兹列表于下：

| 英　文 | 希 腊 文 | 拉 丁 文 |
|---|---|---|
| thousand（千） | chilioi | milli |
| hundred （百） | hccaton | centum |
| ten （十） | deka | decem |

现在，如果我们对大的单位使用希腊文，对小的单位使用拉丁文，就有：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | kilometer[①] | （千米）等于 | 1000 米 |
| 1 | hectometer | （百米）等于 | 100 米 |
| 1 | dekameter | （十米）等于 | 10 米 |
| 1 | meter | （米）等于 | 1 米 |
| 1 | decimeter | （分米）等于 | 0.1 米 |
| 1 | centimeter | （厘米）等于 | 0.01 米 |
| 1 | millimeter | （毫米）等于 | 0.001 米 |

至于一米的长度究竟有多长，这是无关紧要的，其他一切长度单位也是同样规定的．如果你凑巧知道米的长度等于多少码，或者等于多少个光的波长，或者等于一根木棍上某两点之间的距离，你就马上知道了所有其他单位的长度．再者，用十的各种幂来作出的所有其他的子单位，就使从一个单位换算到另一个单位（在我们的十进数制中）变得极为容易了．比如，我马上可以告诉你，一公里中恰好有一百万个毫米．请问，你能不能马上说出，一英里中到底有多少英寸呢？

再说，一旦记住了前缀，那么就能对付任何类型的度量，如果告诉你“泊”（poise）是粘度的一个度量单位，那么，这个单位到底有多大，这个单位同其他各种单位的关系如何，或者甚

① 希腊文 ch 的发音为德文的颚音 ch，发明公制的法国人，由于在他们的语言中没有这样一个音素，故只能用最接近的音素 $k$ 来代替，因此 chilio 就变成了 kilo．因为英语中也没 ch 这个音素，所以这种拼法也适用．原注．

至说，粘度确切的意思到底是什么，这些都是无关紧要的．即使对它的情况一无所知，你仍然会知道，一厘泊(centipoise)等于一泊的一百分之一，一公顷（hectare）等于一百亩（are），一分贝(decibel)等于十分之一贝(bel)，一“千块钱”(kilobult)等于一千美元[①]．

在我看来，1795 年建立了公制的法国科学家们只有在一个方面是目光短浅的．他们所制订的一系列前缀都没有超过千这个符号的．

也许他们觉得，一旦为某些可度量的量选定了一个方便的基本单位，那么，一个比它大一千倍的子单位就可能是最大的有用单位．而只有它千分之一大的子单位就是最小的了．或者，也许他们受到这样的事实的影响，即在拉丁文中，大于一千的数是没有单词的，象百万（million）和十亿（billion）这样的词只是到了中世纪晚期和近代初期才发明的．

诚然，晚期的古希腊语[②]中使用了“myrias”一词来表示一万，因此可把十个千米说成是“myriameter（万米)”，但这个词几乎从来没有使用过，人们说“十千米”(ten kilometers)来代替．

这样，实际形成的结果是，最初制订的公制只提供了数量级为 6 级的前缀．最大的单位“千（kilo)”是最小的单位“毫（milli)”的一百万倍，($10^6$）指数 6 表明了数量级的大小．

然而，科学家们对此不能无动于衷．6 级的数量级对于日常生活来说也许绰绰有余，但随着测试设备的进步，迫使科学

① 如果有人要想写出一毫筐（pede）就是筐的千分之一，那末一个分筐就必定等于 10 毫筐了，是吗？可我没听说过．原注．

② 指公元二～六世纪的希腊语．译者注．

几乎在每一领域中的度量衡都进入很大和很小的范围，这个系统就不得不加以扩展了.

大于千和小于毫的单位曾出现过一些非正式的前缀，当然这意味着有不一致的危险（在科学言语中，不一致是一件糟糕的事）.比如，我们称之为一个“Bev”（即 billion electron-volts，十亿电子伏特）的单位在英国则被称为一个“Gev”（giga-electron volts）.

1958 年，巴黎国际度量衡委员会批准了将前缀加以扩大，制订了一套新的体系，其中各前缀与其相邻前缀之间的间隔均为 3 个数量级．请见下表，为了表明其连续性，将旧的前缀也列入其中：

| 大小范围 | 前缀 | 希腊语词根 |
|---|---|---|
| trillion（$10^{12}$）（万亿） | tera- | teras（“极大的”） |
| billion（$10^{9}$）（十亿） | giga- | gigas（“巨大的”） |
| million（$10^{6}$）（百万） | mega- | megas（“大的”） |
| thousand（$10^{3}$）（千） | kilo- | |
| one（$10^{0}$）（一） | | |
| thousandth（$10^{-3}$）（毫） | milli- | |
| millionth（$10^{-6}$）（微） | mioro- | mikros（“小的”） |
| billionth（$10^{-9}$）（毫微） | nano- | nanos（“微小的”） |
| trillionth（$10^{-12}$）（微微） | pico- | |

前缀 Pico-没有希腊语词根.

这样，我们就有“微微米（Picometer)”等于一万亿分之一米，一个“毫微克（nanogram)”等于十亿分之一克，一个“十亿秒(gigasecond)”等于十亿个秒，一个“万亿达因(teradyne)”等于一万亿个达因．由于最大的单位万亿（tera）是最小单位微微（Pico）的 $10^{24}$，故公制现在扩展到不仅是 6 个数量级，而是整整 24 个数量级.

1962 年又增加了二个前缀：毫微微（femto-）等于一千万亿分之一（$10^{-15}$）；微微微（atto-）等于一百亿亿分之一（$10^{-18}$）．它们都无希腊语词根[①]．这使公制扩展到 30 个数量级．

前缀是否太多了呢？或许有点过分了吧？我们来看看吧．

公制的长度单位是米，关于米的确切长度是如何定下的故事，我不打算细说了，我在这儿只用熟悉的单位来提一下：一米的确切长度等于 1.093611 码或 39.37 英寸．

一千米自然应当等于一米的一千倍，或 1093.6 码，它合 0.62137 英里．如果我们把一公里看作是 $\frac{5}{8}$ 英里的话，相差也不太大．一英里有时也被称作等于“城里的 20 个街区”长，那就不妨说是曼哈顿第 50 街到第 79 街之间的距离．如果这样的话，一公里将表示 12 个半街区，或者是从第 66 街和第 67 街的中点到第 79 街的距离．

把千米增加三个数量级就得到了百万米，它等于 621.37 英里．对于行星量度来说，这是一个方便的单位．从马萨诸塞州的波士顿到加利福尼亚州的旧金山的空间距离只有大约 $4\frac{1}{3}$ 个百万米．地球的直径是 $12\frac{3}{4}$ 个百万米，其周长大约是 40 个百万米；最后，月球与地球的距离为 380 个百万米．

再上去便是十亿米，这个单位长 621,370 英里，它对太阳系的较近星球是适用的．金星处于近地点时，离我们约 42 个十亿米；火星离我们最近时为 58 个十亿米．太阳离地球 145 个十亿米；木星离我们最近时是 640 个十亿米，最远时

① 本文于 1962 年 11 月初次发表．当时我并未写出非希腊的词根；但现在我想把它们全写在这儿：pico 一词来自西班牙语，意即“十”．femto 和 atto 二词来自丹麦语，意义分别为“十五”和“十八”．原注．

是 930 个十亿米.

最后，把刚扩展的公制的上限再加以延伸，就可以得到万亿米，它等于 621,370,000 英里. 这将适用于整个太阳系，比如，冥王星轨道的最大宽度还不到 12 个万亿米.

然而，太阳系在整个银河系中只不过是沧海一粟. 对于度量恒星的距离来说，最常用的两个单位是光年和秒差距，两者都不属于公制的范围，况且，即使把公制再作新的扩展也达不到这么大. 光年是光在一年中走过的距离，它大约等于 5,880,000,000,000 英里或者 9540 万亿米，秒差距（parsec）则是这样的一个距离，在这个距离上，一颗恒星在我们看来其视差等于一秒弧大小，这个词系由视差(parallax)和秒(second)两词的词首字母拼合而成，它等于 3.26 光年，或者大约为 30,000 万亿米.

即使是这些非公制的单位也嫌太小. 如果我们以太阳系为球心，以一秒差距为半径画一个圆球，那么在这个球体中连一颗已知的恒里也找不到. 最近的恒星半人马座. 星系离我们有 1.3 秒差距，而在银河系的大约一千亿颗恒星中只有三十三颗距我们的太阳在千秒差距之内，而这三十三颗恒星中也只有七颗是肉眼可以看得见的.

在银河系的外面又有许多恒星，比它远得多. 整个银河系的直径最宽处可达 30,000 秒差距. 当然，我们在这儿也可以使用公制的前缀，说银河系的直径是 30 千秒差距.

然而，银河系又是整个宇宙中的沧海一粟. 离我们最近的河外星云结构是麦哲伦（Magellanic）云，离我们为 50 千秒差距；而离我们银河系最近的全尺寸星系是仙女座，距我们 700 千秒差距. 在它外面还有几千亿个星系，其距离为许多

百万秒差距.

## 仙女座星系

本文中简略介绍的仙女座星系具有一个不平常的特点：它是我们不借助仪器看得见的最远的天体．因此，如果有人问你，你的眼睛最远可以看多远（当然，如果你是近视眼的话，可以包括你的眼镜在内），你可以告诉他，可以看到 2,300,000 光年之遥．

仙女座看上去象一个淡淡的、模糊的天体亮度约为四等星．它大概未被漫不经心的观天者注意到，但中世纪的一些阿拉伯天文学家已经把它标注在星图上了．在我们西方天文学家中，第一个描述这个天体的（于 1612 年）是德国观测者西蒙·马里乌斯（Simon Marius）．

在下一个世纪，一位法国观测者查理·梅西耶（Charles Messier）①有兴趣把空中所有永久性的模糊天体记录下来，以便不致于与彗星相混（梅西耶有志于彗星的研究）．仙女座在他的星云表中名列第三十一，其代号为$M_{31}$，这个代号至今仍然经常被用到．



图 27　仙女座星系

在十七世纪的简单望远镜中，仙女座看上去象一团旋转的气云．法国天文学家比埃尔·西蒙·德·拉普拉斯（Pierre Simonde Leplace）②认为它确实是这个样子．18 世纪初，他在一本关于天文学的科普著作的附录中提出了一项假设．他认为，象我们的太阳那样四周带有行星的恒

① 法国天文学家，公元 1730～1817 年，1781 年刊布第一个星云表．译者注．

② 法国天文、数学、物理学家，公元 1749～1827 年，1796 年提出太阳系起源的星云假说．译者注．

星起源于象仙女座那样的一团旋转的、浓密的气云，这样仙女座就被称为仙女座星云. 星云 (Nebula) 一词来自拉丁文，意即“云”. 拉普拉斯的假设一直被称为“星云假说”.

近年来，星云假说的一种更为迷惑的说法已被接受为太阳系起源的学说. 但认为仙女座根本不是气云，它是一个恒星的集团，这个星团同我们的银河系一样大，或者更大些，比它更远的有数以十亿计的星系.

已估算出最远星系的距离约为二十亿秒差距，这就意味着，现在整个可见宇宙的直径大约是 4 个十亿秒差距 ①.

现在，假定我们向另一个方向，即朝很小的那一端来考虑长度达单位.

一个微米 (micrometer) 对于在普通光学显微镜下可见的物体来说是一个合适的长度单位. 比如，我们身体细胞的直径平均约为 4 微米 (一个微米通常被称作一个“micron”).

再往下去，就到了毫微米，通常称为“millimicron”，可以方便地用于测量可见光的波长. 最长的红光的波长是 760 毫微米，最短的紫光的波长是 380 毫微米. 紫外光的波长范围为 380 毫微米至 1 毫微米.

继续把公制向下延伸，就得到了微微米 (picometer)，或者说一万亿分之一米. 单个的原子直径大约是 100～600 微微米，软 $\gamma$ 射线的波长大约是 1 微微米.

然而，亚原子粒子的直径和硬 $\gamma$ 射线的波长要比微微米这一级的水平低得多，它们到达大约千万亿分之一米左右.

今日科学所碰到的长度范围，以已知宇宙的直径为一极端，以亚原子粒子为另一极端，其范围大约可达 41 个数量级.

① 自从本文写就后，探测得类星射电源的距离为 4 个十亿秒差距，因而可见宇宙的直径为 8 个十亿秒差距. 原注.

换句话说，需 $10^{41}$ 个质子一个挨一个地排列起来，方可延伸到已知宇宙的边缘．

那末质量怎么样了

公制的质量基本单位是克（gram)，这个词来自希腊文 gramma，意为字母表中的一个字母[①]，它是一个很小的重量单位，等于 $\frac{1}{28.35}$ 英两，一个千克（kilogram)，或一千克等于 2.205 磅，因此，一个百万克（megagram）等于 2205 磅．

百万克与我们的单位一长吨（2240 磅）差不多相等，因此有时也把它称为一“公吨（metricton)”或“吨”(tonne)”．后者这个词是法文拼法，但在发音上与我们相差无几，因此我倒喜欢称它为公吨．

十亿克(gigagram)等于 1000 公吨，一个万亿克(teragram)等于 1,000,000 公吨．以商业标准来说，这些单位已经足够用了．然而在天文中，这些单位甚至还没有触及皮毛呢．即使象月球这样较小的天体，其质量也有 73 万亿个万亿克．地球的质量等于月球的 81 倍，几乎是 6,000 万亿个万亿克．太阳只不过是个一般水平的恒星，其质量等于地球的 330,000 倍．

当然我们也可以把太阳本身作为一个重量单位．比如，银河系的总质量等于太阳的 150,000,000,000 倍，因此也可以说，银河系的质量等于 150 个十亿太阳．由于估计已知的宇宙中至少有 100,000,000,000 个星系，因此，假定我们的银河系的质量是中等的话，那就意味着宇宙的总质量至少等于 15,000,000,000 个万亿太阳或者 100 个十亿银河系．

① 希腊人用字母表中的字母标记小重量，以说明它们的重量，因为他们也使用字母来表示数字．原注．

现在，假定我们朝相反方向去研究一下．

一毫克（milligram），或者千分之一克的物质是肉眼容易看得见的，一滴水的重量大约有 50 毫克．

再往下是微克（microgram），或者一百万分之一克，这时我们已进入显微镜的范畴．一个阿米巴虫的重量大约为 5 微克．

我们身体里的细胞还要比这细小得多，对它们要使用更小的单位毫微克（nanogram），或者十亿分之一克．肝细胞的平均重量大约是 2 毫微克．

比细胞更小的是病毒，即使是微微克（Picogram），即一万亿分之一这个单位还不够小．比如，烟草花叶病病毒的重量只有 66 微微微克（attogram）．

即使这么小的单位也还远远没有到达称量的尽头．分子要远比最小的病毒小得多，而分子又是由原子构成，原子又是由粒子构成．请看下表:

| | 重量（微微微克） |
|---|---|
| 血红蛋白分子 | 0.1 |
| 铀原子 | 0.004 |
| 质子 | 0.00000166 |
| 电子 | 0.0000000009 |

总起来说，从电子的质量到已知宇宙质量的最小值，其范围达 83 个数量级．换句话说，要 $10^{83}$ 个电子才能组成质量同已知宇宙一样大小的一堆物质．

从某些方面来说，时间（我所考虑的第三种类型的度量衡）具有一些我们最熟悉的单位，因为这是公制丝毫不能染指的一个地方．我们今日仍然使用着秒、分、时、日、年等等单位．

这一也就是说，时间的单位是科学家们应用的单位中唯一缺乏系统化前缀的单位制，其结果是，你无法马上说出一周有多少秒，一年有多少分或十五年有多少天，即使是科学家也不能马上说得出．

时间的基本单位是秒，如果愿意的话，我们可以在它前面建立公制的前缀如下：

| | | |
|---|---|---|
| 1 秒 | 等于 | 1 秒 |
| 1 千秒 | 等于 | 16⅔分 |
| 1 百万秒 | 等于 | 11⅔天 |
| 1 十亿秒 | 等于 | 32 年 |
| 1 万亿秒 | 等于 | 32,000 年 |

只要冷静地想一想，我只不过活了$1\frac{1}{4}$个十亿秒稍微多一点的年纪[①]；文明至多不过存在了 250 个十亿秒；而类人的动物也许存在了总共不超过 18 万亿秒．然而，这些都还称不上可以进入地质时代，甚至也很少能进入天文时间．

太阳系存在了大约 150,000 万亿秒，大概还可以再存在 500,000 万亿秒而无甚明显的变化，恒星越小，对于它所贮存的燃料也就消耗得越慢．一颗红矮星可以足足存在 3,000,000 万亿秒而不发生明显的变化．至于整个宇宙过去和将来的总寿命，我就无可奉告了．没有办法来估计宇宙的寿命，那些认为宇宙是不断在创生的人们则认为宇宙的寿命是无限的[②]．

然而，对于天文时间，我倒有一条建议（我并不认为这条建议是我个人首先创独的）．根据合理的估计，太阳绕银河系

---

① 自从本文第一次发表以来，我的年龄已经增长到1¾个十亿秒了，可这没有什么关系，就这样吧，不用更改了！原注．

② 自从本文写就以来，连续创生论已经快要被推翻了．至于从宇宙的目前形式看来，它不象是永存的．原注．

的中心旋转一周需要200,000,000年．我们可以把这段时间称为一个“银河年”，或者更顺口地称为一个“银年”（galyear）．（这个词确是有点讨厌，但是无关紧要！）一个银年等于6250个万亿秒．另一方面，一个“微微银年”等于1小时零45分．

如果我们使用银年，那么全部的化石记录就至多只达到3个银年；而太阳系的全部寿命迄今也不过25个银年；一颗红矮星作为红矮星而存在的全部寿命可能长达500个银年．

现在让我们从另一个方向来看看那些小的时间单位的情况又是怎样的．这儿，至少没有常用的单位来打扰我们，因此，科学家们就有可能随心所欲地使用象毫秒（minisecond）和微秒（microsecond）之类的单位，现在他们甚至能再加上毫微秒（nanosecond）、微微秒（picosecond）、毫微微秒（femtosecond）以及微微微秒（attosecond）．

## 阿米巴

阿米巴虫是一种单细胞动物，通常被认为是最原始的一种动物．它不象其他单细胞动物（“原生动物门”）一样具有固定的形状，但它能在身上的任何一点膨胀起来形成一个“伪足”（Pseudopod，这是一个希腊词，意即“假足”）．它用这些伪足来移动，这被认为是动物运动的最原始形式．

阿米巴这个名称源出于一个希腊词，意即“变化”，因为它的形状不是固定的，而是变化着的．在不加说明的情况下，通常我们所称阿米巴的特定种属指的是“阿米巴变形虫”，可以在溪流或池塘里腐败的有机物中找到．“变形虫（Proteus）”这个词是希腊一位半神半人的名字，他能随心所欲地改变自己身体的形状．

此外还有很多种阿米巴，其中一些是寄生的，有六种可寄生于人体内，其中一种叫赤痢阿米巴（溶组织阿米巴），可致阿米巴痢疾．

虽然文中把阿米巴称为微小的有机体，但它并不是一个很小的



图 18 阿米巴虫

细胞（显微镜下示出）. 阿米巴虫必须在它的单个细胞内包含生命所有的基本功能机构. 人体的细胞更为专门，变得更为细小. 阿米巴的体积等于人体一般细胞的 2,400 倍，比人体最小的细胞（精子）大 25,000 倍.

最小的可独立生存的细胞是细菌，阿米巴比最小的细菌大 210,000,000 倍.

可认为能生存的最小东西（虽然它们仅在它们所寄生的细胞内方能起作用）是病毒. 阿米巴的体积等于最小病毒的 2,400,000,000,000 倍. 阿米巴的大小与最小的病毒相比，就同我们与阿米巴相比一样.

这些微小的时间单位在微观世界中并不十分有用. 当加加林（Gagarin）和格伦（Glenn）[①]以每秒 5 英里的速度环绕地球时，他们的飞行速度每毫秒不到 9 码，或每微秒不到三分之一英寸. 地球本身在绕日运转时的速度是每秒 $18\frac{1}{2}$ 英里，每微秒也只不过移动一英寸多一点.

换句话说，在微秒这一级上，平常的运动可认为是冻结

① 加加林和格伦，是苏联和美国的宇航员. 译者注.

的，然而光的运动要比平常的运动快得多，而某些高速亚原子粒子的运动速度接近光速，

| 光 | 速 |
|---|---|
| 1 秒 | 186,200 英里 |
| 1 毫秒 | 186 英里 |
| 1 微秒 | 327 码 |
| 1 毫微秒 | 1 英尺 |
| 1 微微秒 | 1/80 英寸 |

现在，你可能认为在微微秒这一级上，亚原子的运动，甚至光的传播也“冻结”了．总之，当地球移动 1 英寸时，我把它的运动当作“冻结”的．但是，当问题涉及到一千分之一英寸时，又该怎么说呢?

然而，这里面到底还是有些区别的．地球移动一英寸时，即移动其本身直径的 $\frac{1}{500,000,000}$．一个高速运动的亚原子粒子以接近光速的速度移动 $\frac{1}{80}$ 英寸距离时，即移动了它本身直径的 120,000,000,000 倍．如果地球走过它直径的 1200 亿倍的话，那它得走上 1,500,000 年．就是对加加林和格伦来说，要走过他们飞船直径的 1200 亿倍，也得在轨道上整整耽上一年的时间．

因此，一个亚原子粒子走过 $\frac{1}{80}$ 英寸就不能算是“冻结”，它在这段时间中足够与其他亚原子粒子作惊人次数的碰撞或者发生内部的变化．比如，中性 $\pi$ 介子在形成后 0.1 个毫微微秒（即 $10^{-15}$ 秒）内就衰变了．

$\Omega$ 介子的寿命甚至还要短得多，它在 0.0001 个微微微秒（即 $10^{-18}$ 秒）内就衰变了，或者粗略地说，这段时间大约等于

光对穿原子核的直径打个来回所需的时间.

这样：从 $\Omega$ 介子的寿命到红矮星的寿命，全部时间的范围达到了 40 个数量级. 换句话说，在红矮星的一生中，约有 $10^{40}$ 个 $\Omega$ 介子一个接一个地产生并衰变.

总结一下，可度量的长度跨越 41 个数量级，可计量的质量跨越 83 个数量级，可测量的时间跨越 40 个数量级，很明显，在把公制的范围从 6 个数量级扩展为 30 个数量级时，我们所作的工作并不是太过分的.

# 第四部分

# 数和历法

# 11 我们历年的日

我们一伙人有天晚上偶而聚在一起闲聊，喝喝咖啡，吃吃炸面饼圈．我们当中有个人居然成功地把一位著名的表演者也邀来了．不过，这位著名表演者提出了一个条件．他不表演，甚至也不让人要求他表演．结果协议达成了[①]．

于是产生了一个问题．要是晚会进行得放任起来，势必有人要跟这位表演者纠缠．因此，一定得准备点别的节目．一个伙伴对我说："你说说看，你知道点什么？"

我知道点什么？我立刻表示反对．我说："让我到那边站起来同大伙谈"，同时睁大眼睛盯着混在听众里的这个伙伴，嚷着要他起来代我．并声称："这简直是你们把我往虎口里送！"

可是，他们却哄堂大笑，并讲述我刚才的那些精彩的谈话．（不知怎么，人们很快就发现，只要恭维声起，我立刻就屈服了．）没一会儿，我就答应被送进虎口了．多亏听众的理智——也许是他们的宽宏大量，我出乎意外地居然受到称赞．

聚会那天正巧是"闰日（指二月二十九日）"，所以我的话题是现成的．大意如下：

我想最早的计时单位无疑是日．甚至最原始的人也不得不意识到它，然而，对于长的时间间隔来说，仅用日就不方

① 1964 年 8 月初次发表本文时，我没有提这个表演者的姓名，我认为他不会希望我这样做的．但是我错了，因为在几个月后遇见他，我要求他签名时，他写道："一个著名表演者向伊萨克致以最良好的祝愿"．原注．

便了．原始人的寿命就算它 30 年，那末，一个人也要活大约 11,000 日．在这么多的日子里，事情是很容易搞混的．

自从用太阳支配了日的单位之后，那就很自然地要用另一个最显眼的天体即月球，来做为另一个计时单位．这就一下子提供了一个现成的计时单位——月相周期．月在一定的周期里从新月逐渐增大至望月，然后又逐渐减小至新月．这个时间周期在英语里叫做“month”（月），此字显然缘出于“moon”（月亮）一词，或者更确切地称为“lunar month”（太阴月）．因为还有别种意义的月，它们代表的时间周期比与月相密切相关的月稍微短些或者稍微长些．

太阴月大约等于 29.5 日．更精确地说，它等于 29 日 12 时 44 分 2.8 秒或者 29.5306 日．

在前农业时代，很可能对月没有赋予什么特殊意义，当时，不过是用来计量中等长度时间周期的一种方便的手段．原始人的估计寿命可能约为 350 个月，这比 11,000 日是个远为方便的数字．

事实上，已经有人猜测，《创世记》第 5 章中记述的各个族长延长了的寿命，可能是由于把年同太阴月混淆所致．例如，如果说玛土撒拉（Methuselah）[①]活了 969 个太阴月，这刚好是 79 年左右，是个很合理的数字．可是，在后来的传说中被歪曲为 969 年以后，我们就有了“年龄是玛土撒拉零头”的说法．

然而，这只是我顺便提一下而已，因为任何一个圣经学者都没有真正认真地去看待过这个想法．更有可能的是，这些关于寿命的说法乃是大洪水前的巴比伦传说的残余……，噢，我已经离题太远了．

① 玛土撒拉是《圣经》中的人物，传说是诺亚洪水时代的族长．译者注．

我觉得，随着农业的产生，月又获得了新的、更为重要的意义．农业社会同狩猎或游牧社会相比，对季节的关系更为密切和更无保障．牧人可以云游四方去寻找粮谷或食草，而农人则必须定居在自己所处的地方，企望降雨．农人为了增加收获的机会，必须有把握地在一定时候播种，以利用季节性的降雨和温暖．播种时期差错很容易造成灾荒，更有甚者，由于农业的发展可能使人口密集，更会增加发生灾荒的机会．

于是，人们不得不注意季节的循环．必定还在史前阶段就已经发现，这些季节大约历时 12 个月就完成一整个循环．换句话说，如果作物在一年的某一特定时候栽种，风调雨顺，那末，从第一次栽种数起，经过 12 个月以后，再种下次作物，如果一切进行得顺利的话．

在原始社会里，计算月份是项有技巧的工作，特别当计算错误会带来灾难时．因此，计算通常都由特种阶层即祭司来掌管，这是毫不奇怪的．祭司可能不光从事精确的计算，而且也可能运用他们的经验和手腕来向神灵祈祷，季节的循环毕竟不象昼夜循环和月相循环那么固定不变．晚霜或者雨水不足都可能毁灭这一季节的作物，因为这种气候上的不作美必定与祭祀中产生的小差错相联系（至少当时人们通常是这样想的），所以祭司的职能当时实在是重要的．

因而毫不奇怪，太阴月渐渐产生了巨大的宗教意义．新月节的庆祝每次由专门祭司来宣告，终于把太阴月叫做“朔望月”．

季节的循环称为“年”，因此 12 个太阴月组成一个“太阴年”．用太阴年计量时间，这就涉及到使用“太阴历”．当今，唯一应用严格太阴历的人们是伊斯兰教徒．每个伊斯兰教年由

12 月组成，而月本身通常由 29 和 30 日交替地组成.

这种月平均为 29.5 日. 但是，我已指出过，真正太阴月一个月为 29.5306 日，十二个 29.5 日的月所组成的太阴年为 354 日，而 12 个太阴月的实际时间为 354.37 日.

你也许会说，“那有什么关系呢? ”但是，请你不要这么说. 一个真正的太阴年应当始终从新月那天开始，然而，如果你从新月开始一个太阴年，然后简单地以 29 日和 30 日交替计算月份，那末，第三年将从新月的前一天开始，第六年将从新月的前两天开始，对于笃信宗教的人来说，这是不可思议的.

事情就是这样: 80 个真正的太阴年的总日数几乎精确地为一偶数——10,630.016；而由 29.5 日作为一月所组成的 30 年则有 10,620 日——比与月球保持同时刚巧少 11 日. 由于这个缘故，伊斯兰教徒以某种固定的方式将 11 日分散在 30 年中，便任何一年的开始时间都不会比新月提前或者移后一个整天.

## 娥 眉 月

古代标志着月的开始的娥眉月跟其余各个月相一起孕育了天文学，因为有规则变化的月球形状肯定是天空中唤起人们好奇心的第一个对象. 制订历法的必要性及其价值必定驱使人们去根据月球的循环来发展数学和宗教.

也还有其他别的……

古希腊哲学家发现，把宇宙分成地球和天体两部份，使人在美感上得到满足. 为此，他们探索了这两者在特性上的根本差别，例如: 天体统统发光，而地球不发光.

不过，对这条共通法则来讲月球必定是个例外. 甚至在古代就已经弄清楚，月球的各个相与月球和太阳之间的相对位置有关，月球只是反射太阳光而发光. 这就是说，月球本身跟地球一样，阴暗而又不发光.

而且，如插图所示，当月球处于娥眉月相就象一条微弱的卷缩光带时，月球的其余部分有时着上去其自身发出暗淡的红光．伽利略指出，从月球看地球，地球处于满相，而且月球发出暗淡的地球光；地球同样也反射光，而且象月球那样发光．

当时古希腊人也已十分精确地测定了月球的距离，月球可以想象为一个直径大约为 2000 英里的另一个世界，就象从这个距离看上去那么大．简言之，亏得月亮，用肉眼的天文学才创立了“多元世界”的学说．因为如果月球是一个世界，那末，其他许多天体也可能是．



图 19 娥眉月

每 30 年一循环，其中有 19 年是 354 日的，有 11 年是 355 日的，历法还是同月球保持一致．

为使历法同一个天体的运动保持一致，需要加上一天，称为“插入日”，这是因为把一天插入在历法之中而得名．

然而，太阴年不管是 354 日还是 355 日，都同季节的循环不相匹配．巴比伦天文学家在有史时期之初就已经注意到，太阳的运动是以恒星为背景的，这一种运行方式之所以被密

切注意，是因为渐渐弄明白了太阳在天上走过的完整一圈跟完整的季节循环密切相匹配.（这种恒星对季节的明显影响也许引起了巴比伦崇尚占星术的风气——占星术今天犹存世间.）

太阳沿黄道带运转一整圈大约要 365 日，因此，太阴年比季节循环或“太阳年”要短大约 11 日．三个太阴年就落在季节循环后面 33 日，即整整一个月还多一点.

这是重要的．如果你采用太阴历，并以一年的第一天作为栽种期的开始，那末，3 年以后就要早一个月栽种，过了 10 年，就要在仲冬栽种．33 年以后，太阴年的第一天便经过全部太阳年而回到所假定的时候.

伊斯兰教年的情形正是这样，伊斯教年的第 9 月称为斋月，它特别神圣，因为穆罕默德在这个月开始接受《古兰经》的启示．因此，穆斯林在斋月白天里戒食戒水．可是，在季节循环上斋月每年总要提前一点，每过 33 年便处于一年的炎热季节；这时戒饮特别令人厌烦，因而穆斯林的脾气就变得特别暴躁.

伊斯兰教年以希吉来（Hegira）为纪元，就是说，从穆罕默德自麦加逃亡到麦地那的日期算起．这事发生在公元 622 年．因此，一般地你可以假定，如要知道伊斯兰教年的年份，只要从基督教年年份减去 622 即可，这并不完全对，因为伊斯兰教年比我们的年短，我写这篇文章是在公元 1964 年，于是它是希吉来以来 1342 太阳年．然而，它又是希吉来以来 1384 太阴年，因此，当我写作之时，穆斯林年为希吉来纪元 1384 年.

我已经作过计算，伊斯兰教年大约在一万九千年里赶上基督教年．公元 20874 年也将是希吉来纪元 20874 年，届时，穆斯林年可以最方便地改成我们的年.

为了使太阴年同季节和太阳年保持一致，我们对太阴年可以做些什么呢？我们不能光在最后加上 11 日就完事，因为这样下一年将不是从新月开始，对于古代巴比伦人来说，从新月开始是很重要的．

如果一个太阳年从新月开始，随着我们将发现，第 19 太阳年又将从新月那天开始．你可知道，19 个太阳年差不多有 235 个太阴月．

我们来研究一下这 235 个太阴月．这相当于 19 个太阴年（每年由 12 个太阴月组成）加上其余的 7 个太阴月．可见，如果我们认为有必要，可便太阴年象伊斯兰教所做的那样，一直到 19 个这样的年进展完毕为止．这时，此种历法将落在季节后面恰为 7 月，只要在第 19 年再加上 7 个月（这样，第 19 年有 19 个月——多么匀称！），我们就可以开始一个新的同月球和季节严格一致的 19 年循环．

但是，巴比伦人不愿意让自己落后季节 7 个月，他们把 7 月之差加在 19 年循环之中，每次一个月，并尽可能地均匀．这样，每一循环有 12 个 12 个月的年和 7 个 13 个月的年．“插入月”加在每一循环的第 3、第 6、第 8、第 11、第 14、第 17、和第 19 年，因此每一年都决不会落后或者超前太阳约 20 日以上．

这种基于太阴月，施加一些小手法后，结果同太阳保持一致的历法是一种“阴阳历”．

巴比伦的阴阳历在维护月球圣洁的同时调整好季节，因此在古代很流行．希伯来人和希腊人都采用这种历法，事实上它仍然是今天犹太历的基础．犹太历中，容许个别日子稍落后于太阳．待至加上插入月后，突然一下子稍微超前于太阳．这就是诸如逾越节和赎罪日等节日在民用历上（跟太阳保持

严格一致）出现的日期为什么每年都不同的缘故，在犹太历里，这些节日每年都是相同的．

早期的基督教徒连续使用犹太历长达三个世纪之久，并以此为基础来规定复活节的日子．几个世纪过去之后，事情变得有点复杂起来，因为古罗马人（他们的基督教徒人数在不断增加）不再使用阴阳历，他们为复活节的变化不定而大伤脑筋．必须找出一个公式足以利用罗马历预先计算出复活节的精确日期．

公元 325 年（这时罗马成了正式的基督教国家）的尼西亚会议决定，复活节为春分点后的第一次望月之后的星期日，春分点规定为 3 月 21 日，不过，这里所说的望月并不是真正的望月，而是虚构的，称为“逾越节的望月”．“逾越节的”(paschal) 一词从逾越节（pesach）词而来，源出希伯来语（passover）．逾越节的望月的日期按照一个包含金数和主日字母的公式来计算，我在这里不准备探究这个公式．

结果在民用历上复活节的日子仍然变化不定，早可以在 8 月 22 日，晚可以至 4 月 25 日．基督教的其他许多节日都是同复活节有关的，因此也年年在变．

而且，所有基督教徒对计算复活节日期的精确公式的意见，不是始终一致的．在这个具体问题上的意见分歧也是西部天主教和东部正教分裂的原因之一，中世纪早期曾有一支强大的凯尔特教派，有它自己的计算公式．

我们自己的历法是从埃及继承过来的．埃及并不怎么重视季节．一年里的大事是尼罗河的泛滥，平均每 365 日发生一次．从很早的时候起（无疑地早于公元前 2781 年），月球就被丢弃了，采用了长度固定的 365 日为一年的“太阳历”．

不过，太阳历还保持了 12 个月的传统．因为年的长度是固定的，所以月的长度也是固定的——每月 30 日．这意味着，新月可以是一个月的任何一天，但埃及人并不在乎．（不以月球为基础的月是“历月”.）

12 个各为 30 日的月加起来当然只有 360 日，因此，在每个 12 个月循环之末添上附加的 5 日，作为假日对待．

不过，太阳年并不是精确的 365 日长．太阳年有好多种，长度上略有上下．其中有一种受季节决定的“回归年”，它历时约 $365\frac{1}{4}$ 日．

这就是说，每一年即每个 365 日的埃及年落后于太阳 $\frac{1}{4}$ 日．随着时间的推移，尼罗河泛滥在一年里发生的日期越来越晚，直至最后历经了整整一年．换句话说，在 1460 个回归年里有 1461 个埃及年．

1461 个埃及年的周期称为“狼循环”，其源于天狼星的埃及名字狼星（Sothis）．如果在一个狼循环开始之时，天狼星于埃及年的第一天同太阳一道升起，那末，它以后每年升起的日期将逐年晚下去，直至最后即 1461 埃及年以后，又开始一个新的循环，这时天狼星于元旦又重与太阳一道升起．

希腊人早在公元前 380 年就已经知道那额外的四分之一日了，当时是由克尼杜斯的欧多克斯（Eudoxus）[①]发现的．公元前 239 年，埃及的马其顿国王托勒密·欧耶奇茨（Ptolemy Euergetes）试图改革埃及历，将这四分之一日考虑进去，但是极端保守的埃及人总是不能容忍这种激进的革新．

与此同时，罗马共和国则采纳了阴阳历，在这种历法中

① 欧多克斯，公元前 409～356 年，曾提出日月星辰绕地球作同心圆运动的主张．译者注．

间或加上插入月．然而，掌管历法的宗教职业者乃是些选举出来的政客，决没有象东方那些人那么认真从事．罗马教士们究竟加不加一个月，是根据他们希望长年（当年度选举产生的其他当权的宗教职业者属于他们自己的教派时）还是短年（当他们不属于自己教派时）来决定的．及至公元前 46 年，罗马历落后太阳 80 日．

当时是儒略·恺撒（Julius Caesar）执政，他决定结束这种胡闹状况．他刚从埃及回来，见到埃及使用太阳历的方便和简单，就招来了一位埃及天文学家索西尼斯（Sosigenes）帮助他，他们俩共同把公元前 46 年延续到 445 日，以致后来把这一年称为“混乱之年”．但这使得这个历法同太阳一致了起来，而公元前 46 年便成了最后的混乱年．

罗马人从公元前 45 年起采用修正的埃及历，年终额外的 5 日在这种历法里被分散到全年之中，因而给了我们长短不一的月．从理想说来，我们应当有 7 个 30 日的月和 5 个 31 日的月．不幸的是，罗马人认为二月是个不祥之月，便把它缩短了，结果我们最后得到的是笨拙的安排：7 个 31 日的月，4 个 30 日的月和 1 个 28 日的月．

为了顾及那额外的 $\frac{1}{4}$ 日，恺撒和索西尼斯规定每第 4 年长 366 日．（按照公元年份计数法，每个可用 4 除尽的年都有插入日——定为 2 月 29 日．1964 除 4 得 491，无余数，因此 1964 年的 2 月是 29 日．）

这就是依着儒略·恺撒而称的“儒略年”．在尼西亚会议上，基督教采纳了儒略历．尼西亚会议以后，圣诞节终于被接纳为基督教的一个节日，在儒略年里也规定了一个日期，因此，它就不象复活节那样年年捉摸不定了．

## 儒略·恺撒

儒略·恺撒（儒略历也以他命名而得）当然是由于许多别的原因而在广大公众中间声名卓著的.

他生于公元前102年,他差不多是古代最杰出的人物. 他有着万夫莫当之勇，又是一个挥霍无度的浪荡子. 中年时转向统率军队，证明是一个伟大的常胜将军. 他是古罗马人中仅次于西塞罗（Cicero）的大雄辩家，也是一个大作家. 他还是一位政绩卓著的政治家.

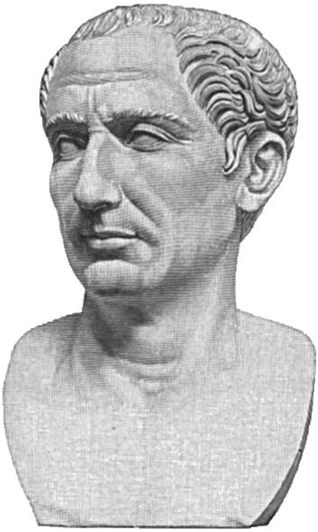


图20 恺撒象

他有着传奇般的魅力. 公元前76年,他为了向最优秀的希腊老师求学而启航赴罗得岛. 途中他被海盗绑票，勒索赎金折合现代货币约10万美元. 一面亲友们在凑集这笔钱，一面恺撒施展魅力同他的劫持者们周旋了好长时间.在他们友好的交谈中，恺撒对他们说，一旦他获得自由，他将带一支船队回来，把他们每个人都吊死. 海盗们嘲笑着认为是开开玩笑而已，而当恺撒被赎回获得自由时，他果真带了一支船队回来，把海盗全部吊死.

当罗马共和国显得越来越难于统治它所维系的帝国而日渐衰落对，恺撒便发动了内战，其间他曾侵入埃及，同克里奥帕特腊（Cleopatra）[①]有过一段著名的风流韵事. 他最后成为罗马王国唯一的统治者和独裁者.

这时他露出了一个重大的弱点. 他深信不疑敌人被宽恕就等于被消灭，他宽恕了许多曾跟他作战过的敌人，封他们为高官，而

① 克里奥帕特腊，埃及女王，公元前69～30年. 译者注.

他们却在密谋反对他，他于公元前 44 年 3 月 15 日（古罗马历三月十三日）被暗杀．

365 日的年恰为 52 个星期又 1 日．这就是说，如果这一年的 2 月 6 日是星期日，则在次年是星期一，再过一年是星期二，余类推．如果只有 365 日的年，则任一给定的日子都将按部就班地经历一星期的每一天．然而，假使有一个 366 日的年，那末，这一年的长就是 52 个星期又 2 日；如果这一年的 2 月 6 日是星期二，则下一年是星期四，跳过了星期三．由于这个原因，366 日的年称为“闰年”，2 月 29 日称为“闰日”．

如果回归年的长真是精确地为 365.25 日，那就万事大吉了，可是事情并非如此．回归年长 365 日 5 小时 48 分 46 秒或者 365.24220 日．儒略年平均还要长 11 分 14 秒或者 0.0078 日．

这看来并不算多，但也意味着，儒略年在 128 年里就超过回归年一整天．随着儒略年的超前，落在后面的春分点，年复一年地越来越早．在公元 325 年的尼西亚会议时，春分点为 3 月 21 日；到公元 453 年，为 3 月 20 日；到公元 581 年为 3 月 19 日，如此等等．公元 1268 年，当罗吉尔 · 培根（Roger Bacon）①在世时，儒略年超过太阳 8 日，春分点为 3 月 13 日．

这虽然还不是灾难性的，但是教会期待着绵绵无期的将来，而复活节被 8 月 21 日的春分点束缚着．如果长此下去，复活节将会在仲夏庆祝，而圣诞节则将延至春天．因此，罗吉尔 · 培根于 1263 年写了一封信给罗马教皇乌尔班（Urban）四

① 罗吉尔 · 培根．英国思想家、哲学家和杰出的自然科学家，约公元 1214～1294 年．译者注．

世说明这种情况．但是，教会化了三个世纪来考虑这件事情．

及至 1582 年，儒略历又超前了两天，春分点变成了 3 月 11 日．教皇格里高利（Gregory）十三世终于采取行动．第一步他略去 10 日，把 1582 年 10 月 5 日改为 1582 年 10 月 15 日，使得历法跟太阳同时，并且使 1583 年的春分点成为 3 月 21 日，即尼西亚会议决定的那个日子．

第二步是防止历法再发生步调不一致，儒略年每过 128 年要超前一整天，在 384 年里就要超前三整天，或者近似地说，400 年里超前三整天．这意味着，每 400 年里应当略去 3 个闰年（按儒略制）．

考虑一下逢百之年——1500、1600、1700 等等．在儒略年里，所有逢百之年均可被 4 除尽，所以都是闰年．每 400 年中，有 4 个这样的逢百之年，那末，为什么不使其中 3 年列为普通年，而只使其中一年（可被 400 除尽的那年）列为闰年呢？这种安排将使历年更密切地跟太阳匹配，从而提供了我们“格里历”．

概括起来说：儒略历允许每 400 年有 100 个闰年，总共为 146,100 日．在同样 400 年里，格里历只允许 97 个闰年，总共为 146,097 日．试将这两个长度同长度为 146,096.88 日的 400 个回归年作比较．在这样一段时间里，儒略年超过太阳 3.12 日，而格里年只超过 0.12 日．

但是，0.12 日还得有近 3 小时，这就是说，格里历在 3400 年里将要超过太阳一整天．大约到公元 5000 年的时候，我们将不得不考虑略去一个额外的闰年．

但是，教会等待了一个稍长时间才采取行动．如果早一个世纪做这件工作，那末，整个西欧本来可以毫不费力地改革

历法．然而，至公元 1582 年北欧大都已皈依新教，这些国家宁肯按照非基督教徒恺撒的命令维持同太阳的步调不一，而不愿答允教皇的更正．因此，他们保留了儒略年．

1600 年没有产生危机．它是逢百之年，且可用 400 除尽．因此，无论儒略年和格里历，它都是个闰年．但是，1700 年就不同了．儒略历把它作为一个闰年，而格里历则不然．1700 年 3 月 1 日，儒略历超前太阳一个附加日（总共 11 日）．丹麦、尼德兰和新教的德国都接受和采纳格里历．

大不列颠和美洲殖民地一直坚持到 1752 年才接受．1700 年又超前了一日，因此他们不得不略掉 11 日，结果把 1752 年 9 月 2 日改成 1752 年 9 月 13 日．此时整个英国万众哗然，因为他们很快得出结论：他们将由于通过立法而突然年长了 11 日．

“还我们十一天！”他们绝望地大声疾呼．

（一条比较合理的反对理由是，虽然 1752 年的第三季度缩短了 11 日，但地主却厚颜无耻地仍要收整季的地租．）

这样一来，美国第一任总统华盛顿（Washington）结果不是在“华盛顿的生日”出生的．诚然，他的生日依格里历是 1732 年 2 月 22 日，但在家庭圣经上所记载的日子不得不为儒略日，即 1732 年 2 月 11 日．当转变发生之时，华盛顿本人——一个极其明智的人——便更改了他出生的日期，从而保留了真实的日子．

欧洲的东正教国家比新教国家更加顽固．1800 年和 1900 年都过去了．这两年儒略历都是闰年，但格里历则不然．于是，到了 1900 年，儒略历的春分点为 3 月 8 日，所以儒略历超前太阳 13 日．例如只是到了第一次世界大战之后，苏联才采纳了格里历．（苏联人对闰年的模式稍作修改，使之更为精

确．苏联历在经过整整 35,000 年之后才超过太阳 1 日)．

然而，有些正教教会仍然墨守儒略年，所以正教圣诞节在我们的历年上是 1 月 6 日，而在他们的历年上仍为 12 月 25 日．

事实上，我产生了一个可怕的想法．

我自己出生的时候，儒略历在那个故国[①]还有效．我不象乔治·华盛顿，我决不改变生日，结果我每年都比应该的日子早 13 日来庆祝自己的生日，从而使自己比我应该的年龄大了 13 日．

而这个老了 13 日的我现在见诸一切记载，我再也不能改它回来了．

还我十三天！还我十三天！还我……

## 12 从 头 开 始

每年，总有一个元旦降临．由于我的生日紧跟着元旦，因此，一年的这个开端总是我深刻而又忧郁地从良心上作自我反省的双重机会．

我或许能够凭借比较客观的思考而在回首往事时不太伤感．例如，谁说一年是从元旦开始的呢？不同于任何其他日子的元旦究竟是怎么样的呢？根据什么使 1 月 1 日那样特殊呢？

事实上，当我们把时间分割成某种单位时，我们如何决定从哪一个单位起始呢？

① 好吧，如果你们一定要知道的话，这是苏联．我是 3 岁的时候来这里的．原注．

例如，让我们从头开始（正如我非常喜欢做的那样）考虑“日”本身的意义.

日由昼[①]和夜两个部份组成. 它们各有其自然的天文学上的起源. 昼开始于日出，夜开始于日落.（黎明和黄昏都和夜沾边，但那仅属细枝末节）.

然而，从纬度看，在大多数人居住的地方，一年里的昼和夜有长短变化（当一个短时，另一个变长），因此利用昼夜之和作为单一的 24 小时的时间单位有一定的方便性. 昼和夜结合起来，一天的持续时间近乎固定.

噢，那末，日应当从日出还是日落开始呢？你也许赞成前者. 因为在原始社会里日出是工作日的开始. 另一方面，在原始社会里日落是工作日的结束，当然，结束也意味着新的开始.

有些人这样决定，另些人则那样决定. 例如，埃及人以日出为一日之始，而犹太人则以日落为开始.

后一种情形见诸《创世记》第 1 章，其中描述了创世时期.《创世记》中第 1:5 节里写道：“晚上和早晨是第一日.”晚上（也就是夜间）在早晨（也就是白昼）之前，因为日开始于日落.

这种安排在犹太教中沿用到今天，犹太人的节日现在仍从“前一日晚上”开始. 基督教最初是犹太教的一个旁系，甚至今天在某些非犹太人的节日上这种从日落开始的习惯还有存在.

圣诞节前夕一说从词语的本义而言，乃是 12 月 25 日的

---

① 非常使人讨厌的是，“日”既意味着有阳光照亮的那部份时间，又是指昼夜相连的 24 小时. 这在令人赞美的英语里完全是一个不必要的缺陷. 我知道，希腊语里对这两个实体各有单词表示. 我将用“昼”表示日照期间. 用“日”表示 24 小时期间. 原注.

晚上，但如我们大家都知道的，它实际上是指 12 月 24 日的晚上——如果圣诞节象犹太人节日那样从“前一日晚上”开始的话，那它自然是指这个晚上．除夕也是这样．

另一个熟悉的例子是万圣节前夕，即万圣节前一天的晚上，这个节日是为了纪念全体“圣徒”（或“圣人”）的．万圣节是 11 月 1 日，因此万圣节前夕是 10 月 31 日晚上．我应当告诉你，万圣节前夕更以其为人们所熟悉的缩写字“Halloween”（万圣节前夕）而闻名．

然而，日落或者日出事实上都不是日的开始．从日出到日出这段期间在昼期变短的半年里稍长于 24 小时，而在昼期变长的其余半年里稍短于 24 小时．从日落到日落这段期间，也是如此．

日出和日落沿相反方向变化，要么相互接近，要么彼此远离，因此昼的中点（正午）和夜的中点（午夜）之间的间隔时间一年到头都保持在固定的 24 小时（实际上有微小的偏差，但可忽略不计）．

人们可以从正午开始一日，以固定的 24 小时循环计数，但是工作周期要分在两个不同的日子里．从午夜开始一日要好得多，午夜时所有正常的人都入睡了．事实上我们现在就是这样做的．

天文学家属于午夜时不在床上睡觉的少数人之列，他们长期坚持正午作为一日的开始，这是为了不使他们夜间的观察分在两个不同的日子里．但是顺从社会习惯的趋势是不可抗拒的，他们为了同世界的其他时间步调一致，于 1925 年承认从午夜开始所带来的不便．

凡是比日短的时间单位都取决于日，这不会有任何问题．

你可从日的开始计算小时，可从小时的开端计算分钟，如此等等．

当然，当日的开始改变它的位置时，那将会影响到小时的计算．本来，昼和夜各分为 12 小时，分别从日出和日落开始．小时的长度随着昼和夜的长度的不同而改变，因此在 6 月里的昼（在北半球）由 12 个长的小时组成，夜由 12 个短的小时组成，而 12 月里的情形刚好相反．

天主教会至今仍沿用这种计算小时的方法作为“祈祷时间”．例如，“晨祷”（“第一课”）是代表上午 6 时的术语．“第三时”（“第三课”）代表上午 9 时，“第六时”（“第六课”）代表上午 12 时，“第九时”（“第九课”）代表下午 3 时．注意“第九时”在下午的正中，正是一日最热的时候，一日最热的时候很可能被认为是日的正中，而这个词不知怎地转变成天文学上的正午，结果我们称上午 12 时为“noon（正午）”．

这种比较古老的计算小时的方法还构成了耶稣格言之一（《马太福音》第 20:1～16 节），说雇工在一日的“第十一时”之前（包括“第十一时”在内）的各个不同的时间受雇用．此格言中的“第十一时”是指日落即工作日结束之前 1 小时．由于这个缘故，于是“第十一时”就意味着可以做完某件事的最后时刻．然而，对于我们来说，这种说法已无强制力，因为我们把第十一时看做为上午 11 时或者下午 11 时．上午 11 时在一日之中，为时尚早，还不会开始感到恐慌；而下午 11 时则太晚——我们这时总该入睡了．

星期起源于巴比伦历法，按这个历法，七天中有一天是休息日（理由是这天是个不吉利的日子）．

公元前六世纪时在巴比伦的犹太囚虏捡拾起了这个概

念，并把它建立在宗教基础之上，使它成为一个愉快的日子，而不是不幸的日子．他们在《创世记》第 2:2 节里解释了它的由来：在为期六天的创世工作之后——“第七天上帝结束了他所做的工作，于是他在第七天便休息了．”

在那些奉《圣经》为非同凡响的典籍的社会里，于是就把犹太人的“安息日”（源出于希伯来语“休息”一词）规定为星期的第七日亦即最后一日．这个日子即我们历法上所标的星期六，因此星期日是新的一星期的第一日．所有我们的历法都把日排列成七列，星期日为第一列，星期六为第七列．

早期的基督教徒首先赋予星期的第一日以特殊的重要意义．起先，自耶稣复活节发生在一个星期日之后，它就成了“主日”．后来，随着时间的推移，基督教徒开始认为他们不止是从犹太教分离出来的一支教派，更加重要的是要有自己独特的宗教仪式．因此，在基督教社会里，休息日是星期日，而不是星期六．（当然，在我们当前衰落的时代里，星期六和星期日两者都是休息日，总起来称为“周末”，一个用汽车事故来庆祝的时日．）

工作周从星期一开始，使许许多多人都把它看做星期的第一日，并导致产生下述孩提式的困惑（我之所以提这点，只是因为当我初次听到它时，它曾巧妙地使我中了圈套）．

如要你的受骗者读出 t-o、t-o-o 和 t-w-o 的发音，每次念一个，深入地仔细听取发音．每次他总是说（一边在疑虑，究竟怎么回事）“tooooo”．

然后你说：“现在请读出星期的第二日的发音”，而这时他的脸神显得如释疑团，因为他自以为他看出了圈套．他断定你是在希望他象老粗似地将会读出“tooosday”．因此，他就以过分准确的发音说：“tyoosday．”

对此，你会渐渐地迷惑起来，说:“这不叫人奇怪吗? 我总是念它为 Monday（星期一）.”

同月球联结在一起的月，在古代是从一个固定的月相开始的. 从理论上来说，任何月相都可以. 月可以从每个新月开始，也可以从每第一个四分之一开始，等等. 实际上，每个月最合乎逻辑的开端是新月——即在这个晚上，日刚落时增大着的蛾眉月的第一轮光带变得可见之时. 就任何一个逻辑的始意而言，新月显然是在那时形成的，而月则应当从这时候开始.

然而，今天的月跟月球是不相干的，它与年相连，而年依次又以太阳为基础. 在我们的历法里，平年的第一月的开始是在年的第一日，第一月开始于年的第 32 日，第三月开始于年的第 60 日，第四月开始是在年的第 91 日，如此等等——同月相完全无关.（在闰年里，自第三月起所有的月都晚一日开始，因为 2 月有 29 日）.

现在我们来谈年. 年是什么时候开始的，为什么?

原始农业社会起先一定是把年看做前后相继的季节. 春夏秋冬是年的早晨、正午、黄昏和夜间，就象日的情形那样; 这里似乎有两个同样合格的侯选者，可作为年开始的标志.

工作年的开端是春天，这时大地回春，播种开始，这难道也不应是通常一年的开始吗? 另一方面，秋季标志着工作年的结束，这时收成稳操在手（寄予虔诚的希望）. 随着工作年的结束，难道新年不应当开始吗?

随着天文学的发展，春季的开始同春分点（我们历法上为 8 月 20 日）相连，秋季的开始同秋分点（半年以后，即 9 月 23

日）相连．

有些社会选一个二分点为开始，另一些则选另一个为开始．在希伯莱人中间，这两个二分点都同元旦相连．其中之一为犹太历 7 月的第一日（在春分点前后）．逾越节在这个月的正中，因此它同春分点相连．

按照《福音书》，耶稣受难和复活发生在逾越节期间（《最后的晚餐》就是指逾越节的宴会），因此受难节和复活节也都同春分点相连（见第 11 章）．

希伯莱人在犹太历 1 月的头两日（在秋分点前后）也庆祝元旦，因此这个二分点成了两个之中比较重要的一个．它如今被犹太人当作“Rose Hashonah（年的开始）”，即众所周知的“犹太新年”．

一个晚得多的、同秋分点相关的元旦的例子是跟法国革命有关的．1792 年 9 月 22 日，法国君主政体被废除，共和国宣告成立．革命派的理想主义者感到，既然人类历史上的新时代已经开始，就需要有一个新的历法．他们定 9 月 22 日为元旦，并制订了一张新的月份表．第一个月为穑月，因此 9 月 22 日变成了穑月 1 日，

穑月 1 日历时 13 年一直是法国政府的官方元旦，但是这个历法从来没有在法国以外甚至在法国国内人民中间流行过．1506 年，拿破仑（Napoleon）制止了这场斗争，正式恢复旧历．

除二分点外，还有两个重要的太阳事件．春分点以后，中午时分的太阳越升越高，直至 6 月 21 日达到最高，这就是夏至．因此，这一天的白昼全年最长．

过后，中午时分太阳的高度就渐渐下降，直至达到秋分点位置，然后又继续下降，最终于 12 月 21 日达到最低高度即

冬至，这也是全年中最短的白昼.

夏至没有多大意义."施洗约翰节"在夏至前后（传统的英国日子为 6 月 24 日）. 这是一个高兴、尽情欢乐甚至放荡的日子. 莎士比亚（Shakkspeare）的《仲夏夜之梦》就是描绘这种嬉闹时节的一个戏剧范例，而"仲夏疯狂"一说也许就是这样产生的.

冬至是远为壮严的事情. 太阳逐日下降，在原始社会里，人们不相信天文规律的不变性，他们很可能认为，这个时候，太阳将继续下降，一去而不复返，以致春天将永不再来，一切生灵将统通死亡.

因此，当太阳的下降日渐缓慢，终于停止，并于 12 月 21 日开始转变回升时，他们必定会引起很大的宽慰和欢乐，最终经过仪式化而变成一个以喜庆和狂欢为特征的盛大的宗教节日.

这方面最著名的例子是古罗马人在这个时节的几天节日. 这个节日是以萨特恩（Saturn，古代意大利农神）命名的，因此称为"农神节". 它是一个欢宴和赠送礼物的日子，与人为善到了甚至连奴隶也获得暂时的自由，而由他们的主人来服侍他们. 在农神节的宴会上，人们还要狂欢杨饮.

事实上，"农神节"这个词现在已经标志着荒淫浪荡，或者说象征着无节制的欢乐笑闹.

就象蛾眉月的初次出现标志着新月的诞生一样，冬至可以说是标志着新太阳的诞生. 因此，年从冬至开始是合乎逻辑的. 儒略 · 恺撒在改革罗马历使之成为太阳历而非太阴历时，在脑海里可能也有类似的想法（见第 11 章）.

古罗马人传统上从 3 月 15 日（"3 月的艾德兹日"）开始他们的年，原来的目的是想逢上春分点，但是由于古罗马掌管

历法的人草率从事，以致最终却远远离开这个二分点．恺撒作了调整，把年的开端改为 1 月 1 日，使之靠近冬至．

然而，把年的开端定在冬至或其前后的这种习惯并不普遍．在英格兰（和各美洲殖民地）用来代表春分点的 3 月 25 日作为官方年的开始一直保留到 1752 年，在这一年以后，才采纳 1 月 1 日为年的开始．

新太阳的开始在现代同样以另一种方式表现出来．在罗马帝国时代，基督教日益兴起的权势在太阳神崇拜方面遇到了最危险的竞争对手，这是一种起源于波斯、以太阳为对象的崇拜热，这种宗教仪式的中心是代表太阳的太阳神这个神话人物，庆祝他的诞辰的日子是 12 月 25 日——约莫冬至的时候．对于惯于每年在这个时候庆祝农神节的古罗马人，这无论如何是一个过节的佳辰良宵．

可是，基督教最后剽窃了崇拜太阳神的发明，把耶稣的诞辰定为 12 月 25 日（这在《圣经》上是没有根据的），以致冬至这个时节最后成了耶稣基督和太阳两者生日的标志．当今有些道学家们（我是其中之一）发现，在现代世俗的圣诞节庆祝中，有某种东西令人不愉快地联想起古罗马的农神节．

但是，年从哪里开始呢？年份的计数自然是很方便的，但是，我们从哪里数起呢？在历史观念尚未高度发展的古代，只要从当地的国王或者统治者登基起开始计数年份就足够了．每有一位新国王登位，计数就要重新开始．在年年选举行政官的城邦里，根本就不计数年份，面只是以这一年的行政官的名字来命名，雅典就是以其执政官来命名年份的．

《圣经》上就是以这种方式来表示所有事情的年代．例如，《旧约全书》中的《列王纪（下）》第 16:1 节里写道：“雷马利

亚（Romaliah）的儿子彼卡（Pakah）十七年，犹太的约瑟姆(Jotham）国王的儿子阿霍兹（Ahaz）开始称王.”（彼卡是同时代的以色列国王.）

## 拿破仑·波拿巴

本文简单地提一下拿破仑，他出身科西嘉的造反者，先后成了法国的将军和皇帝，最后被放逐．他结束了近代唯一的一次新历

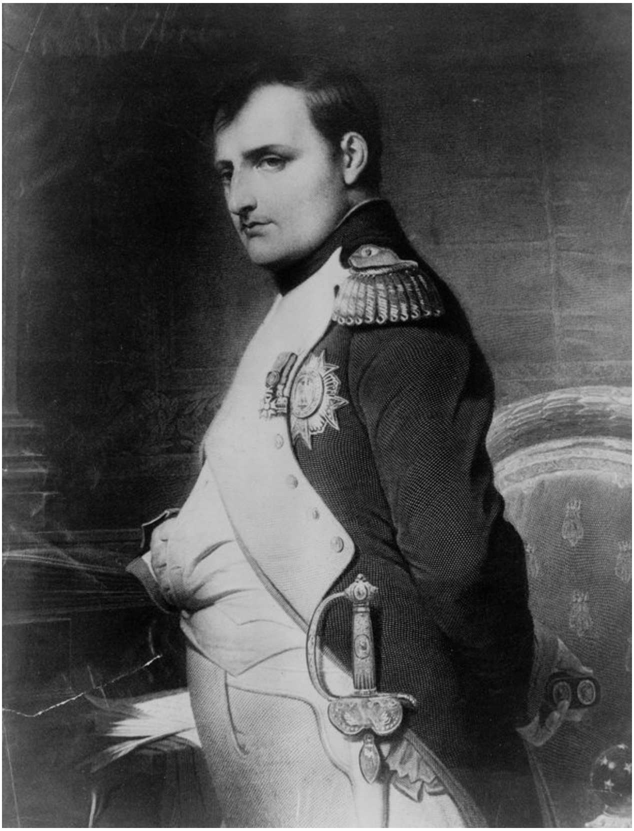


图 21 拿破仑象

法实验，在其他方面也同科学不无瓜葛.

1807 年，他因征战来到波兰. 他感到惊讶，那里竟还没有为哥白尼（Copernicus）竖立过雕像，于是就建立了一座. 但在落成之时，竟然没有一个天主教教士答应在庆祝会上担任司仪.

拿破仑资助了诸如拉格朗日（Lagrange）和拉普拉斯等科学家，并提升和褒奖他们，一次，当他羁押着一批英国战俘时，他只是当爱德华 · 詹纳（Edward Jenner，接种天花痘苗发现者）在要求释放的申请书上签名之后才释放了他们.

1798 年，拿破仑侵入埃及时，他带了一批科学家去调查研究埃及的古代文明. 就在这次发现了刻有希腊文和埃及文的罗塞达碑[①]，于是埃及文终于得到译解，从而大大地增进了我们的古代史知识. 拿破仑皇帝曾经大力支持法国科学，以图能比较成功地同英国科学竞争. 这同一个半世纪以后的美苏竞争相似.

拿破仑在科学方面最有名的故事就是同天文学家拉普拉斯的联系. 拉普拉斯当时正在出版他的《天体力学》的前几卷，这部著作完成了牛顿的工作，描述了太阳系的运转机理. 拿破仑浏览了全书，评论他书内没有提及上帝. 而拉普拉斯说："我不需要这个假设".

而在《路加福音》第 2:2 节里，在指明耶稣出生时的那个征税期的年代时，只是这样写道："这次征税最初是在居鲁尼乌斯（Cyrenius）当叙利亚的总督时进行的."

除非你有准确的国王和地方行政官吏名单，而且正确知道每人在位多少年以及一个区域的名单同另一个区域的有怎样的关系，否则你便要陷入困境. 正是由于这个缘故，现在有那么多的古代日期无法确定——甚至（正如我马上要讲的）象耶稣诞辰那样重要的日子.

① 1799 年在尼罗河口的罗塞达城郊发现的埃及古碑，上刻埃及象形文、俗体文和希腊文三种文字. 此碑的发现为译解古埃及象形文字起了重要的作用. 译者注.

一个好得多的方法是选择过去的某个重要的年代（最好是选得足够早的，以便你不必处置在那时之前的负数年份），年份就从那年连续地计数下去，再不要从头开始．

希腊人即为此而利用了奥林匹克运动会．这个运动会每四年举行一次，因此四年一循环就是一个“奥林匹亚德”（Olympiad）．奥林匹亚德连续地计数，而其中间的四年则计为某一奥林匹亚德的第 1，2，3 或第 4 年．

但是，这使事情无谓地复杂化了，在继亚历山大大帝之后的时代，希腊人优先引进了一种纪年方法．古代东方曾为亚历山大的部将们征服，有一个将军塞琉古（Seleucus）在亚洲加沙打败了另一个将军．塞琉古仗着这一胜利确立了他对亚洲广大地区的统治，他决定以发生在第 117 奥林匹亚德的第 1 年的这场战争为起点来计数年份，这一年成了“塞琉古纪元”的元年，以后的年份依次为 2，3，4，5 年等等．再没有比这更煞费苦心的了．

塞琉古纪元有着特殊的重要性，因为塞琉古及其后裔统治着犹太，因而犹太也一直沿用这种方法，即使犹太人在马卡比（Maccabees）的领导下摆脱了塞琉古王朝之后，他们对涉及整个古典世界的商业交易仍沿用塞琉古纪元．因而，那些商业记录能与不同的地方纪年联结起来，仍可以精确地配合．

然而，古典世界最重要的纪年方法是“罗马纪元”．它开始于罗马城邦建立的那一年．按照传统，这是第 6 奥林匹亚德的第 4 年，它被记作 A.U.C.1 年（缩写“A.U.C.”代表“Anno Urbis Conditae”；意即“罗马城邦建立之年”）

如采用罗马纪元，则汉尼拔[①]最后被打败的那场札马[②]

① 汉尼拔，迦太基大将，公元前 247～183 年．译者注．

② 札马，北非一古城．译者注．

（Zama）战争应当发生在A.U.C.553 年，而儒略·恺撒被暗杀是在A.U.C.710 年，如此等等．随着古罗马日渐强盛，这种方法也逐渐在古典世界流行开来，并一直持续到中世纪早期．

早期的基督教徒急切地想表明《圣经》上的记载早于希腊和罗马，因此极力要在比罗马城邦建立和奥林匹克运动会创始都早的一个日期来开始计数年份．生活在 A.U.C.1050 年前后的一位教会史家恺撒里亚的欧塞比乌斯（Eusebius）计算得出，始祖亚伯拉罕的生年比罗马城邦的建立早 1263 年．因此，他采用这一年作为他的元年，所以 A.U.C.1050 年成了亚伯拉罕纪元 2313 年．

一旦《圣经》完全确立了作为西方世界的那部圣经的地位，人们就可以合乎逻辑地使事情达于至高无上，就可以从创世来开始计数年份．中世纪的犹太人计算出，创世是在罗马城邦建立之前 3007 年，而各个基督教计算者则选择在罗马城邦建立之前 3251 年至 4755 年不等，这些就是各种各样的"开天辟地纪元"（"世界纪元"）．犹太的开天辟地纪元今天还应用在犹太历中，因此，1964 年 9 月即为犹太历 5725 年开始．

开天辟地纪元有着一个重要的有利因素．它们都开始得相当早，以致在有记载的历史上，很少有（如果有的话）年代必须给以负数．但是，举例来说，罗马纪元就不这样．奥林匹克运动会的创立、特洛伊战争[①]、大卫（David）登基和金字塔的建立，全都在罗马城邦建立之前，因而都必须给以负的年数．

当然，古罗马人并不在乎，因为古代人都没有很强的年代

① 古希腊传说，古希腊人与特洛伊人之间的十年战争，为荷马史诗《伊利亚特》的主题．译者注．

意识，但是现代历史学家就不会马虎了．事实上，如果罗马纪元被保留下来的话，那末，现代历史学家的境况甚至更加糟糕．

约在A.U.C.1288 年，一个名叫狄奥尼修斯·埃克西吉（Dionysius Exiguus）的叙利亚僧侣根据《圣经》资料和世俗的记载，计算出耶稣必定出生于A.U.C.754 年．作为计数年份的开始来使用，这似乎是个理想的时间，这个概念直至查理大帝（Charlemagne）[①]时代（狄奥尼修斯以后两个半世纪）才臻于完成．

A.U.C.754 年成了公元（A.D.）元年（A.D.代表 Anno Domini，意为“基督之年”）．按照这个新的“基督纪元”，罗马城邦之建立当在公元前（B.C.）753 年（B.C.代表 Before Christ，意为“基督之前”）．第 1 奥林匹亚德的第 1 年为公元前 776 年，塞琉古纪元元年为公元前 312 年，等等．

这就是今天所应用的纪年法．这意味着自苏美尔直至奥古斯都（Augustuas）[②]的全部古代历史都必须以负数纪年．所以，我们始终要记住：恺撒在公元前 44 年被暗杀，翌年是 43 年而不是 45 年．

更糟的是，狄奥尼修斯的计算是错误的．《马太福音》第 2:1 节里明白地写道：“耶稣出生于希罗德（Herod）国王时代的犹大的伯利恒（Bethlehem）”这个希罗德就是所谓的希罗德大帝，他生于 A.U.C.681 年，于 A.U.C.714 年由马克·安东尼（Mark Antony）拥立为犹大国王．他死于 A.U.C.750 年（这个日期之闻名肯定不下于任何有名的古代日期），因此耶

① 法兰克王，公元 742～814 年．译者注．

② 苏美尔是美索不达米亚的一个著名的早期民族；奥古斯都是罗马帝国皇帝的称号．译者注．

稣的出生不可能晚于 A.U.C.750 年.

然而，按照狄奥尼修斯 · 埃克西古的纪年法，A.U.C.750 年为公元前 4 年，因此在年表中总会看到：耶稣出生于公元前 4 年，这就是说，比一般认为的耶稣诞生早 4 年.

## 查理大帝

查理大帝在这里是作为正式采纳现代西历纪元的幕后策动者来介绍的，西历纪元现今几乎已为全世界普遍用来计数年份.

查理大帝约在 742 年生于德国的亚琛（Aachen）. 在他的治理下，法兰克帝国达到全盛时期. 他统治的疆域包括今天的法国、比利时、荷兰、瑞士、大部份德国、大部份意大利，甚至还有西班牙的一部份. 西罗马帝国于是复兴了（勉强地），他于 800 年称帝，从而



图 22 查理大帝象

开始了绵延千年之久的传统，直至 1806 年由于拿破仑征服德国而告终.

查理大帝在科学史上所起的重要作用，在于他在称为黑暗时代的那个时期的中期又一次点燃了火把. 他本人和当时除了教士而外的几乎所有的人都是文盲. 但是，他在成年时努力学习阅读，不过还没能制服他的手指去学会书写所必需的符号.

他基本上还认识到了学问的重要性，因此从 789 年开始创办学校. 在那里可以在一个名叫阿昆（Alcuin）的英国学者的总指导下，教授数学和语法基础及各种基督教会科目.

查理大帝所取得的成就有时被称为“卡罗林（Carolingian）复兴”①. 这个成就是卓越的，但又是脆弱的，它还不及这个大帝的寿命长. 大帝于 814 年 1 月 28 日死于亚琛，继承他的儿子路德维希（Ludwig）才智要差得多，通常称他“诚笃者”，因为他完全被教士操纵，他控制不了他的皇族或者贵族，北欧海盗带来的恐怖，使先天不足的复兴彻底崩溃.

事实上，根本没有理由肯定耶稣正是生于希罗德死的那年.《马太福音》第 2:16 节中写道：希罗德想杀掉耶稣，于是下令把 2 岁以下的小孩全部杀死. 这一节可解释为：它表明了耶稣在希罗德还在世时可能至少是 2 岁，因此他可能早在公元前 6 年就出生了. 实际上，有些估计把耶稣诞辰挪前到公元前 17 年.

这使我不得不可悲地承认：虽然我欢喜从头开始，但是我始终无法肯定这头究竟在哪里.

---

① 即指查理大帝王朝的复兴. 译者注.

# 第五部分

# 数和生物学

# 13 那就是它的大小

不管我们怎么侈谈物质是如何可数的，但是绝对的大小给人还是留下了深刻的印象．随便哪个动物园里，最常见到的两种动物是猴和象，前者因为它们令人难堪地同我们人相象，后者则仅仅因为它们体格硕大，我们虽然朝着猴子嘻笑不已，可是站在大象面前却敬畏得默不作声，如果把高康大（Gargantua）[①]放进猴子笼，那他将会不管是猴是猿全都撵出笼去．实际上他是会这样做的．

这样地突出硕大，自然就会使人感到渺小，甚至觉得是微不足道的．然而，人类却已在地球这颗行星上达到了无与伦比的主宰地位，因此，这个事实常常被描绘成为大卫（David）和歌利亚（Goliath）的英雄传奇[②]，面我们自己就是大卫．

然而，如果我们恰当地看待统计资料的话，那末，正如我们所看到的，描绘我们的这幅图像并不是十分准确的．

首先，让我们来考虑这个尺度的上限部分．我刚才提到把象作为大动物的一个例子，如把它奉若神明地认为在动物中首屈一指，那是一种陈腐思想．“大得象只象”不过是句惯用语．

不过，大象并不是没有资格居于创记录的位置．没有一个陆上动物可以指望这个位置．在陆地上，动物必须克服不受减损的重力．即使把它的身体抬起离地面几英尺或者或快

---

① 文艺复兴时期法国作家拉伯雷（Rabelais）所著政治讽刺小说《巨人传》的主人公．译者注．

② 基督教《圣经》记载，古以色列国王大卫在童年时杀死了勇士歌利亚．译者注．

或慢地把它移动都不成问题，但这种与重力的搏斗很明显地限制着体积的大小．如果设想一个动物平躺在地上，静卧不动地终其一生，比如牡蛎，那么，它还得在每次呼吸时把许多组织向上提起．一条被冲上海滩的鲸死于好多种原因，但原因之一是它自身的重量压迫它的肺，使它慢慢窒息而死．

### 象

大象和人的相互结合在古代最迷人，那时大象用在战争中作为象现代用坦克那样的活的战争工具．它能够运载许多人，以及各种重要的进攻武器．它用其自身，用其躯干、长牙和大腿制造破坏，给对方在心理上造成令人恐怖的威胁，使敌对力量只是艰难地面对



图 23  非洲象

着这种宠然巨兽对阵．使用大象的最大缺点是，遇上力量悬殊时，它十分机智地会临阵脱逃，而且当它们惊慌（特别是受伤）时，对自己方面的破坏会大于对敌方的破坏．

西方第一次遇到大象是在公元前 326 年，那时亚历山大大帝打败了旁遮普国王波鲁斯（Porus），后者尽管动用了两百头大象．在后来的一世纪里，继承亚历山大的君主们都使用过大象．

通常都只是一方或者另一方拥有大象，但是在后来亚历山大军队中的各个相互争权的将军们之间于公元前 301 年发生的伊普苏斯（Ipsus）战争中，双方都有大象，总数近三百头．使用亚洲大象比较普遍，间或也有使用非洲大象的．但是，这种非洲象是北非出产的，比亚洲象要小．北非种现在已经灭绝，我们今天说的非洲象都是指东非大象，它是巨型种，是现存最大的陆地哺乳动物．插图所示的正是这种巨型非洲象．

希腊将军皮洛士（Pyrrhus）于公元前 280 年把象带进南意大利去同古罗马人作战，古罗马人虽然惧怕这种巨兽，却不管怎样仍旧坚决地进行战斗．最后一次象战是札马之战，这次战争中汉尼拔的大象并未帮助他打败古罗马人．

可是，在水中，浮力大大地抵消了重力．在陆地上意味着足以压死的重量，在水下却毫无困难地能支撑住．

由于这个缘故，地球上最大的动物，无论现在还是过去，都是在鲸中发现的．保持创纪录的鲸种是蓝鲸，也叫长箦鲸．有记载的这种最大的巨型动物的一个标本，长 108 英尺，重 $131\frac{1}{4}$ 吨①．

蓝鲸和我们一样，都是哺乳动物．如果我们想知道就大小而言我们怎么会列入哺乳类动物的，那末，让我们看看最小的哺乳动物是怎样的．

---

① 本文最初发表于 1961 年 10 月．自那时以来我所获得的更好的数据，在此重新发表时均一一加以订正．原注．

最小的哺乳动物是鼩鼱，这种动物外表看上去象鼠，但不是鼠，甚至不属啮齿目．而它们是食虫动物，实际上跟我们的关系比跟鼠的关系更为密切．最小的成年鼩鼱的重量为 0.052 盎司．

在这两种最大和最小哺乳动物之间，密集地排满了各种动物．蓝鲸以下是别的较小的鲸类，然后是其他动物，诸如大象、海象、河马，往下是麋，熊、野牛、马、狮、狼、狐狸、兔、鼠和鼩鼱．在这张从最大的鲸到最小的鼩鼱的长长的单子上，人处于什么位置呢？

为了避免繁复起见，同时还因为我的体重是个理想的整数 200 磅，因此我将用我自己来作为量度．

现在，按照这样一个参考系，我们既可把人看做巨人，也可以看做侏儒：同鼩鼱相比，当然是个巨人；而同鲸相比，那就是个侏儒．那末，我们对较大重量的观点如何作出决定呢？

首先，如对吨、磅和盎司来作比较，那会造成混乱，因此，让我们把这三个重量全部归入一个通用单位，为了避免分数（至少在开始时是这样），我们考虑用克作为这个通用单位．（1 盎司约等于 28.35 克，1 磅约等于 453.6 克，1 吨约等于 907,000 克，供参考．）

于是，我们可以说，一条蓝鲸重达 120,000,000 克，而一只鼩鼱只重 1.5 克．人则介乎其间，重 90,700 克．

我们比一只鼩鼱重几万克，但是一条鲸要比一个人重几千万克．因此，可以确信，我们与其说是个巨人，还不如说是个侏儒，而且坚决要保留大卫和歌利亚的图景．

不过人的感觉和判断不是按减法来进行区分的，它们是按除法来区分的．在我们看来，2 磅和 6 磅重量之间的差别似乎比 6 磅和 12 磅重量之间的差别来得大，尽管在前一种情

况下只有 4 磅之差，而在后一种情况下却有整整 6 磅之差，看来，要计算的是 6 除以 2 为 3，而 12 除以 6 仅为 2．我们所探求的是比而不是差．

自然，做除法是令人厌烦的．象任何四年级学生和许多成人都坚信的那样，除法属于高级数学之列．因此，如果我们能够通过减法来获得比值的话，那将是令人愉快的．

要这样做，我们取一个数的对数，而不是数本身．例如，最常用的对数形式是这样构成的：1 是 10 的对数，2 是 100 的对数，3 是 1,000 的对数，如此等等．

如果我们利用数的本身，我们在指出比值相等时可以这样说：1,000：100 等于 100：10，这是除法．可是，如果我们利用对数的话，则我们在指出同样的比值相等时可以说：3 减 2 等于 2 减 1，而这是减法．

还有，或者说 1,000：316 大约等于 316：100（检验一下试试看）．既然 1,000 的对数为 3，100 的对数为 2，因此，我们可以设 316 的对数等于 2.5，因此利用对数，我们就可以这样来表述比值的相等．3 减 2.5 等于 2.5 减 2．

那么，让我们以克数的对数项来给出最大和最小哺乳动物的体重．120,000,000 克的蓝鲸用对数可表示为 8.08，而 1.5 克的鼩鼱可表示为 0.18．至于 90,700 克的人，则为 4.96．

如上所述，人跟鼩鼱相差约 4.8 对数单位，但与最大的鲸仅仅相差约 3.1 对数单位．由此可见，我们更接近于巨人而不是接近于侏儒．

要是你以为这一切不过是个数学游戏、不过是我要弄的巧妙手法而已，那么，我要说，这些数字相当于：一个人的重量是一只鼩鼱的 45,000 倍，但一条蓝鲸的重量只是一个人的 1,300 倍．看来人比鼩鼱要比鲸比人大得多．

事实上，一个刚好居于鼩鼱和鲸两者之间的重量，其对数为 0.18 和 8.08 的算术平均数，即 4.13．这个对数代表 13,500 克即 30 磅重量的动物，这样说来，相当于一个中等大小的哺乳动物，大约为一个四岁的孩童，或一条体重适中的狗．

当然，你或许会争辩说，分成两组——侏儒和巨人——太简单化了，为什么不写成三组——小型，中型和巨型呢？如果将对数范围划分成相等的三部分，那么，我们将获得：从 0.18 至 2.81 范围为小型，2.81 至 5.44 为中型，5.44 至 8.08 为巨型．

如换成普通单位，这就意味着：任何 1.5 磅以下的动物算小型，而超过 550 磅的动物则为巨型．按照这种观点，在上述两者之间的动物包括人就是中等大小的，我必须承认，这似乎是十分合理的．这似乎是一种很好的方法，表明了人如果不算侏儒的话，同样也不算是巨人．

不过，如果我们要比拟得恰当，那就要做到无懈可击．利用大卫和歌利亚这个题材，是为了证明人赢得了地球这个行星上霸主的地位，这是脑力对体力的胜利．可是，在这种情形下，为什么把鲸看做体力的极端大呢？早期的人绝不会跟鲸竞争．鲸生活在海洋，人生活在陆地，我们只会同陆地动物斗争，所以还是让我们考虑以陆生哺乳动物来建立我们的上限．

曾经存在过的最大陆地哺乳动物如今已不复存在了．这就是俾路支兽（baluchitheriumluo），是一种已灭绝了的巨犀，它站起来肩部高达 18 英尺，而重量必定在 20 吨左右．

要知道，俾路支兽（顺便讲一下，它之所以叫“俾路支兽”，

是因为它的化石最初是在俾路支地方发现的）的重量不到蓝鲸的七分之一，俾路支兽的克重量的对数值为 7.26．

（以下，我讲到的重量均以普通单位计，但在括号内注上对数值．请记住，这是以克表示的重量对数．）

可是，俾路支兽当然在人类出现之前就已经灭绝了，人也就没有同它竞争过．为了合乎情理，应该将与人类同时代生存的动物作比较，这样才能表示有可能竞争，生活在人类时代的最大哺乳动物是各种大象．现在生存着的最大的非洲象，共总重量可达 10.7 吨（6.99）．可以肯定，人类可能同现已灭绝的、还要更为大的象种竞争过．曾经存在过的最大的象的重量不可能超过 20 吨（7.25）．

（顺便说一说，要注意，大象只有俾路支兽的一半重，蓝鲸的 5%重，事实上，现存最大象种的一头成年象大约只有一条新生的蓝鲸那么重．）

我还没有讲完．在跟其他物种争夺世界霸权的斗争中，人的直接竞争者是其他食肉动物．大象是食草动物．它可能无意地或者在愤怒时有意地把人压死，不然就没有理由伤害人．人不是象的食物．

然而，人却是长着锐利的长犬齿的虎的食物．虎如果饿得发慌，即使想绕道躲开的人，它也要蹑手蹑脚地追踪，把人抓住并撕食．这里就有竞争．

真正最大的动物几乎总是食草动物，获得植物卡路里要比获得动物卡路里容易得多，而且总的来说，素食较肉食能够供养更大的动物．（这并不是说，某些食肉动物就不会比某些食草动物大得多的．）

最大的动物——蓝鲸，从学术上来说的确是食肉动物．但是，它以浮出水面的微小生物为主食，因此从哲学意义上来

说，这同食草相去不远．它不是那种长有能够撕咬的牙齿的典型食肉动物!

地球历史上最大的真正食肉动物是巨头鲸．生着一张大嘴、下颚长着很多牙齿的一条成年巨头鲸，重量达 75 吨 (7.83)．

不过，我们还是不会同海洋动物竞争的．最大的陆地食肉哺乳动物是阿拉斯加（Alaskan）大熊，也叫科迪亚克（Kodiak）熊，它间或重达 1,650 磅（5.87)，我不知道已灭绝的陆地食肉哺乳动物中有比这更大的．

说到动物重量的下限，我们无需作任何修正．鼩鼱是陆地哺乳动物，也是食肉动物，而且就我所知，是曾经存在过的最小的哺乳动物．或许它还是可能生存的最小的哺乳动物．哺乳动物的代谢率随着身体大小的减小而加快，因为体表-体积比随着身体的大小减小而增大．有些小动物能够通过阻碍和扰乱来使代谢率下跌取得补偿（而且也这样做了)，但是热血动物则不能，它必须保持高的体温，因而它的新陈代谢非常快（除了暂时的冬眠期外)．

象鼩鼱那样大小的热血动物几乎必须不停地吃才能维持生命．鼩鼱如果三两个小时不吃，就要饿死，它总感到饥饿，结果总是恶狠狠地天生一个坏脾气．没有人看见过一只胖鼩鼱，也永远不会看到．(如果有人想拿出邻居妻子的照片来反驳这种说法的话，我请不必了．)

现在，让我们把全部陆生食肉哺乳动物分成三部分．从 0.18 至 2.08 是小动物，从 2.08 至 3.98 是中等动物，而从 3.98 至 6.87 是巨型动物，如果用通用单位来表示，这就是说，$4\frac{1}{4}$ 盎司以下的是小动物，$4\frac{1}{4}$ 盎司至 22 磅的是中等动物，22 磅以上的是巨型动物．

人类通过斗争首先是赢得生存，然后达到胜利的时代．在这时代里，人在陆地食肉哺乳动物中是巨人．在大卫和歌利亚的斗争中，其中有一个歌利亚获胜了．

当然，我自始至终那么谨慎地限制于哺乳动物，这会使人引起疑心．你可能会想，人也许限于只属哺乳动物中的巨人；但是如采我把视野放宽的话，则人毕竟是个侏儒．

事情并不如此．事实上，哺乳动物一般说来是动物中的巨物．非哺乳动物中只有一种能够同大型哺乳动物相竞争（陆地上的），它们是中生代的爬行巨兽——常人一般称之为"恐龙"的那一大类动物．

最大的恐龙差不多跟最大的鲸一样长，但是恐龙的颈和尾非常细，因此它们在重量上比不上同样长的鲸．身体最庞大的大恐龙——腕龙（Brachiosaurus）可能重达 75 吨（7.83）．它有巨头鲸的大小，但只及蓝鲸大小的五分之三．果然不出所料，最大的恐龙是食草动物．

最大的食肉恐龙是异龙，有的可重达 20 吨（7.26）．异龙可以同俾路支兽一样重，两倍于最大的象的重量，二十四倍于比起来觉得弱小的科迪亚克熊的重量．

异龙无疑是曾经生存过的最大的和最可怕的陆地食肉动物．但是，它们及其整个恐龙家族早在人类出现前几百万年就已经在地球上绝迹了．

如果我们局限于生活在人类时代的爬行动物的话，那末，最大的动物看来就是东南亚的大鳄了．可惜，报道这类动物的大小，总是趋向于长度而不是重量（描写蛇就更是如此），有的被描述为接近 30 英尺长．我估计，这类巨兽最大的重量应当有 2 吨（6.25）．

我对现在生活着的次最大类爬行动物——海龟，有比较精确的数字．有记载的最大的海龟是海生的棱龟，重 1,902 磅（5.93），即差不多 1 吨．

这两种当然都不是陆地动物，棱龟肯定是海生动物，而鳄鱼是河生动物．不过，就鳄鱼而言，我倾向于不把它们从与人类竞争者的名单中划去．早期文明都是沿着热带或者亚热带河流发展的，例如，谁不知道尼罗河鳄鱼的威胁呢？它无疑是长着咬人的嘴和齿的危险动物，到头来全给它咬掉！（哪一部反映弱肉强食的电影会没有鳄鱼令人恐怖的滑行和龇牙咧嘴的镜头呢？）

鳄鱼比最大的陆生哺乳动物小，但是最大的爬行动物似乎比科迪亚克熊重，然而，纵令我们把"陆地"食肉动物的新的上限设为 5.93，那末，人仍然还算作巨人．

如果我们谈到真正陆生的爬行动物，那末，它们在大小上显然不如哺乳动物，最大的陆地爬行动物是加拉帕戈斯（GaláPagos）龟，它可重达 600 磅（5.42），最大的蛇是网斑蟒蛇，它最长可达 33 英尺，大约超过 460 磅（5.32）的重量．最后，最大的现在生活着的蜥蜴是科摩多（Komodo）巨蜥，最大的长达 12 英尺，重达 250 磅（5.05）．

鱼类是十分壮观的．所有现存的或者已经灭绝的鱼类中，最大的鱼是鲸鲨．它们最大的标本想像为同巨头鲸一样大和一样重，也许设想它们最重为 45 吨（7.61）比较切实．这些鲨鱼还是海水的无害的过滤器．最大的食肉鲨是白鲨，它长达 35 英尺，重可能达 12 吨（7.03）．

有骨的鱼中最大的（例如金枪鱼、剑鱼、翻车鱼或鲟鱼）可重达 3,000 磅（6.13）．然而，鱼全都是水生动物，当然不会同任何人直接竞争，除了从事高度专业化的潜水采珠业的人

而外.

至于鸟，正如你会想到的那样，不怎么壮观．重量很重而仍能飞行，这是不可能的.

这就是说，任何鸟如以重量和人抗衡的话，必定都不会飞行的，曾经生存过最重的不会飞行的鸟是马达加斯加的隆鸟(也叫象鸟)，站着有10英尺高，重量可达1,000磅(5.66).新西兰最大的恐鸟甚至更高（12 英尺），但比较轻，重量不超过500磅（5.36)．比较起来，现在生存的最大的鸟，驼鸟——还是不会飞行的——最重的约350磅（5.20).

## 蜂　鸟

蜂鸟是能够占满昆虫小生境的最稠密的热血动物．它们身体小了一些，并能够通过代谢作用产生热量，但产生的热量并不能抵偿经由体表损失的热量.

作为最大的蜂鸟即巨型蜂鸟，重约20克（0.7盎司)，比中等的麻雀也小得多，而最小的蜂鸟则仅为这个大小的十分之一．这最小的名为蜜蜂样的蜂鸟，意在强调它同昆虫相似．它取食花蜜，能够在空中翱翔，然后突然冲向任何方向，象一只特大蜻蜓.

蜂鸟下的蛋是鸟蛋中最小的一种，125 个才有一个鸡蛋那么重，约18,000个才抵得上最大的鸟蛋即已灭绝的巨型鸟隆鸟的蛋那么重．但同蜂鸟本身的大小相比，它们下的蛋还是相当大的．一般两个蛋的重就达它母亲重量的十分之一(但这还不是创纪录的．不会飞行的新西兰鸟——鹬鸵——下的蛋几乎是它自身重量的四分之一，这怎么会不使它身体垮掉，对我来说将永远是一个谜.)

蜂鸟是生命体中耗用能量最厉害的生物，它每 24 小时消耗约 10.3 大卡，这相当于每克体重约 5 大卡．人体在同样时间里可消耗2,500大卡，每克仅0.035大卡，就重量比例而言，蜂鸟消耗的能量约为我们的150倍．不过，在夜间蜂鸟就不活泼了，不论体



图 24 蜂鸟

温还是代谢率都大大下降. 在本文中享有小热血动物之誉的鼩鼱, 它的代谢率更低一些, 但它在夜间同白昼一样活泼——没有蛰伏的习性.

至于谈到飞鸟, 它们的重量就大大减轻了. 信天翁双翼

展开时翼尖的距离是创纪录的，达 12 英尺，但双翼并不很重，甚至最重的飞鸟重量或许不超过 40 磅（4.26）．即使最大的现已灭绝的会飞爬行动物——翼手龙——虽然双翼展开达 25 英尺，但实际上完全是翼，没有身体，可能还没有信天翁重．①

为了补齐脊椎动物纲，还要提到两栖类．最大的两栖动物是在日本发现的巨型蝾螈，长达 5 英尺，重达的 90 磅(4.60)．

从最小的方面去研究，我们发现最小的鸟是古巴的蜜蜂样的蜂鸟，重约 0.07 盎司（0.30）．（跟鼩鼱一样，这种蜂鸟几乎需要一刻不停地吃，它们饿得很快．）

然而，比起任何一种热血哺乳动物和鸟类来，冷血脊椎动物的大小可以比较小些，因为冷血意味着体温可以降低到环境温度，面且新陈代谢可以减慢到实用水平．因此，最小的脊椎动物是某些鱼种．菲律宾群岛有一种属于鰕虎鱼科的鱼，完全成熟后的长度也只有八分之三英寸．这种鱼重 $\frac{1}{50}$ 克（-2.70）．你可曾注意到，已经用上了负对数．

无脊椎动物又怎么样呢?

无脊椎动物体内没有赖以支撑组织的骨胳，所以不能指望它长得象脊椎动物那么大，只有在水里，它们借助浮力才可能长得比较象样．

最大的无脊椎动物是在软体动物中发现的．已经实际测得过巨型枪乌贼的长度为 55 英尺；据猜测，其最大长度可达 100 英尺，这样的长度也是虚假的，因为它们主要是些相当轻的触须．这种动物的最大重量不象会超过 2 吨（6.26）很多．

① 1975 年曾发现了比翼手龙还要重得多的会飞爬行动物的化石．我揣测它可能有 50 磅重．原注．

表2　大　　小

| 动　　物 | 特　　征 | 克重量对数 |
|---|---|---|
| 蓝鲸 | 最大动物 | 8.08 |
| 巨头鲸 | 最大食肉动物 | 7.83 |
| 腕龙 | 最大陆地动物（已灭绝） | 7.83 |
| 鲸鲨 | 最大的鱼 | 7.61 |
| 异龙 | 最大陆地食肉动物（已灭绝） | 7.26 |
| 俾路支兽 | 最大陆地哺乳动物（已灭绝） | 7.26 |
| 白鲨 | 最大食肉鱼 | 7.03 |
| 象 | 最大陆地动物（在世） | 6.99 |
| 巨型枪乌贼 | 最大无脊椎动物 | 6.26 |
| 鳄鱼 | 最大爬行动物（在世） | 6.25 |
| 翻车鱼 | 最大有骨鱼 | 6.13 |
| 棱龟 | 最大海龟 | 5.93 |
| 科迪亚克熊 | 最大陆地食肉动物（在世） | 5.87 |
| 隆鸟 | 最大的鸟（已灭绝） | 5.66 |
| 巨蛤 | 最大腹足纲软体动物 | 5.50 |
| 加拉帕戈斯龟 | 最大陆地爬行动物（在世） | 5.42 |
| 网斑蟒蛇 | 最大的蛇 | 5.32 |
| 鸵鸟 | 最大的鸟（在世） | 5.20 |
| 克摩多巨蜥 | 最大蜥蜴 | 5.05 |
| 人 |  | 4.96 |
| 巨型蝾螈 | 最大两栖动物 | 4.60 |
| 信天翁 | 最大飞鸟 | 4.26 |
| 大螯虾 | 最大节肢动物 | 4.19 |
| 花金龟科大甲虫 | 最大昆虫 | 2.00 |
| 蜜蜂样的蜂鸟 | 最小的鸟 | 0.30 |
| 鼩鼱 | 最小哺乳动物 | 0.18 |
| 鰕虎鱼科鱼 | 最小的鱼和脊椎动物 | -2.70 |
| 仙蝇 | 最小昆虫 | -5.30 |
| 轮虫 | 最小多细胞动物 | -8.22 |

另一种软体动物巨蛤，重可达 700 磅（5.50），但主要重的是无生命的蛤壳；而最大的节肢动物是大螯虾，重达 34 磅（4.19）.

至于陆地无脊椎动物，其重量微不足道．最大的陆地蟹和陆地蜗牛在重量上决不能同任何哺乳动物（极小的除外）相比．确实也是这样，在所有陆地无脊椎动物中，最有作为、最为重要的是昆虫．最大的昆虫是花金龟科大甲虫，其长度可达五、六英寸，重约 100 克（2.00）.

各种昆虫表现为重量递减而等级分明，其最大重量恰巧衔接于哺乳动物重量尺度的下端．这个下端是令人惊讶的，因为有种叫作仙蝇的小甲虫，成熟后的长度只有 $\frac{1}{125}$ 英寸．这种动物的重量不大于 0.000005 克（-5.30）.

甚至这也不是创纪录的．在各种各样的多细胞无脊椎动物中，最小的是轮虫．它们中就是最大者也不过十五分之一英寸长，最小者只有三百分之一英寸长，重 0.000000006 克（-8.22）．换句话说，轮虫之与鼩鼱相比，就象鼩鼱之与鲸相比一样．如果我们再往小处看，那末，我们最终将不仅把人，而且也把鼩鼱都看做生命动物中的巨物.

不过，比轮虫小的是些单细胞动物（但是，比较大的单细胞动物事实上要比最小的轮虫和昆虫来得大），我准备在这里搁笔了，只是再补充一张大小的一览表.

然而，如果我们再回到大卫和歌利亚图景并且把人看做歌利亚的话，那末，我们还真有些大卫可以考虑——啮齿动物、昆虫、细菌和病毒．至此，还没有考虑到利润，而聪明的富翁们终究才是真正的大卫哩.

# 第六部分

# 数和天文学

# 14 质子计算器

在我的心坎里，虔诚地供奉着数学家阿基米德的神龛．

说实在的，如果我相信灵魂轮回是有这么一回事的话，但愿我自己的灵魂能在阿基米德的躯体里居留一阵子，因为我觉得那儿会有个称心如意的住所．

我现在来说明其中的道理．

阿基米德是希腊人，居住在西西里的叙拉古．他生于公元前 287 年左右，卒于公元前 212 年．他生活的时代，希腊的强盛时期（从军事上和政治上来说）早已过去，而罗马正勃兴走向称霸世界．事实上，阿基米德死于罗马征服军劫掠叙拉古期间．但是，这个时期正是希腊科学极盛的世纪——而阿基米德正站在希腊科学的项峰，

但这不是我对他特别亲昵的原因（我毕竟没有站在任何科学的顶峰）．成为原因的是他的一件工作；这在希腊语叫“Psammites”，拉丁语叫“Arenarius”，而英语叫“The sand-Reckoner”（砂粒计算器）．

这事曾奏禀叙拉古国王的长子格朗（Gelon），奏本的开头是这样写的：

“格朗国王殿下，有些人认为砂粒的数目是无限多．我说的砂子，不仅是指叙拉古和西西里其他地方存在的，而且还包括不管有人居住还是无人居住的每个角落里的砂子．还有些人虽然不认为它是无限多，但仍认为举不出大得足以超过它的数字．显然，持这种观点的人如果从另外方而来想象一个由砂子堆成象地球质量一祥大的物体，连同地球上的全部海

洋和山谷都填得象最高的山一样高，那末他们往往另有这样的认识：超过这么多的砂粒数目的任何数都可以表示出来，不过，我试图用几何证明来表明（你将会了解的），在我列举的和我寄给佐克西普斯（Zeuxippus）的那篇著作中所给出的那些数字中，有一些不仅超过了大小等于按上述方式填充起来的地球的砂体砂粒数目，而且还超过了大小等于宇宙的物体.”

阿基米德接着发明了一种表示大数字的数制，按照这种数制可以一直整理到需要表示为 $10^{80,000,000,000,000,000}$ 或者近乎 $10^{10^{17}}$ 的数字.

此后，他根据当时最先进的知识着手估计宇宙的大小. 他同样也着手确定一粒砂的大小. 他说，一颗罂粟种子可容下 1 万粒砂子，而罂粟子的直径为手指宽的 $\frac{1}{40}$.

给出了宇宙的大小和一粒砂的大小，便容易确定填补宇宙需要多少砂粒. 他算出了一个以他的数制表示的确定的数字，按我们的数制等于 $10^{63}$.

我显然觉得（我是从一切可能方而这样说的），阿基米德是在为我撰写我要写的科学论文中的一篇，这正是他深得我心的原因所在.

现在，让我们想想看，把他的论文尽可能地符合他的初衷向前推进一步还能做些什么.

阿基米德说，一颗罂粟子的直径为手指宽的 $\frac{1}{40}$，我自己的手指看上去直径大约为 20 毫米，因此一颗罂粟子的直径按照阿基米德的规定是 0.5 毫米.

如果一个直径为 0.5 毫米的球将容纳 10,000（$10^4$）粒砂子；如果阿基米德的宇宙将容纳 $10^{63}$ 粒粒砂子，那末，阿基米德

宇宙的体积为一粒罂粟子的 $10^{59}$ 倍．这个宇宙的直径便是一颗罂粟种子的 $\sqrt[3]{10^{59}}$ 倍．$10^{59}$ 的立方根等于 $4.65\times10^{19}$，如果乘以0.5毫米，则得出阿基米德宇宙的直径为 $2.3\times10^{19}$ 毫米，或取其一半，得半径为 $1.15\times10^{19}$ 毫米．

这个半径合 1.2 光年．在当时，人们认为恒星都固定在一个以地球为中心的大球上，因此阿基米德那时是在说，固定恒星的大球与地球的距离在任何方向上都是 1.2 光年左右．

一个古代数学家得出这样的数字是难能可贵的．当时，最近的天体——月球的确切距离正在测算之中，而其他所有的距离都还一无所知．

但这与实际相去甚远．如现在已知，连最近的恒星离我们的距离，也是阿基米德所认为的全部恒星距离的四倍左右．

那末，宇宙实际有多大呢?

宇宙中离我们最远的天体是各个星系，有些星系比其他一些星系远得多．二十世纪初已经确定，星系（只有最接近我们的极少几个是例外）全都在退离我们．而且，星系越暗，也就是离我们越远（推测起来），退离的速率越大．

美国天文学家埃德温·鲍威尔·哈勃 (Edwin Powell Hubble) 于 1929 年确定，根据现有的数据，退离速度和距离之间似乎有一种线性关系．换句话说，如果星系 1 是星系 2 的两倍远，那末，星系 1 将以两倍于星系 2 的速度退离我们．

这个关系（通常称为哈勃定律）可以下式表示:

$$R=kD \quad \text{（方程 1）}$$

式中 $R$ 为星系退离速度，$D$ 为它的距离，$k$ 为常数，我们可称之为“哈勃常数”．

这定律还不属于科学家们可以感到确信无疑的关于宇宙的那些重大基本定律．然而，自从哈勃定律提出以来的将近四十年来，似乎还没有把天文学家们引入歧途，还没有提出证明它虚假的观测证据，因此，它现在仍然为人们接受．①

哈勃定律的论点之一是，如果宇宙作为一个整体（而不是构成它的物质）在膨胀的话，那末，它确实就是预料之中的．在这种情况下，每个星系都将离开所有其他星系而运动，而且从任一作为特许点的星系看来，其他星系的退离速度的确随着距离的增加而直线增加．既然爱因斯坦广义相对论方程能够适合于膨胀宇宙，所以天文学家们有理由感到幸运．实际上比哈勃定律提出早好几年时，荷兰天文学家威廉·德·西脱（Willem de Sitter）就已经提出过膨胀宇宙的理论．

然而，哈勃常数的值多大呢？最初提出它等于每一百万秒差距 500 公里/秒．这意味着，一个距一百万秒差距的天体将以 500 公里/秒的速度退离我们；一个距二百万秒差距的天体以 1,000 公里/秒的速度退离；一个距三百万秒差距的天体以 1,500 公里/秒的速度退离，如此等等．

这个常数值已证明大大地偏高．现在一般的看法，显然都把它的值定在每一百万秒差距 75 和 175 公里/秒之间．这个常数的大小随着天文学家知识的增进而不断减小．因此我揣测，目前这个估计值的下限最接近于实际值．我将取每一百万秒差距 75 公里/秒作为哈勃常数值．

这样，星系能够离我们多远呢？如果退离速度每一百万秒差距增加 75 公里/秒的话，那末，退离速度终于会达到光速

① 本文初次发表于 1966 年 1 月．十年来，围绕哈勃定律一直有相当激烈的争论．虽然它仍为天文学家们接受，但是我的态度现在已不如当时那样自满自足了．原注．

（300,000 公里/秒）.

更远的星系怎么样呢？如果哈勃定律在一切距离上完全有效，如果我们忽略相对性定律，那末，一定会看到，比已经以光速退离的星系更远的星系在以大于光速的速度退离.

在这里，我们不必停顿来研究超光速的速度是否可能的问题，以及这种超界限星系能不能够存在. 这是无关紧要的. 一个超光速退离我们的星系所发出的光不可能到达我们这里，中微子也好，引力影响也好，电磁场或者其他什么也好，都不可能. 这种星系怎么也不可能观察到，因此就我们而言，并不存在以爱因斯坦的信条还是牛顿的信条来作为我们的论据的问题.

于是，我们有了所称的可观察宇宙. 这不仅是用我们最好的和放大率最大的仪器所能观察到的那部分宇宙，而且也是能够用分辨率无限大、最完善的仪器能够观察到的那部分宇宙.

因此，可观察宇宙的体积是有限的，其半径等于星系退离速度达到 300,000 公里/秒的那个距离.

假定我们将方程 1 表示为

$$D=R/k \text{（方程 2）}$$

令 $R$ 等于 300,000 公里/秒和 $k$ 等于每一百万秒差距 75 公里/秒. 然后我们可以解出 $D$，答数单位为百万秒差距.

于是，得出结果为

$$D=300,000\div 75=4,000 \text{（方程 3）}.$$

此即离我们的最远可能距离，或者相当于可观察宇宙的半径，它为 4,000 百万秒差距，即 4,000,000,000 秒差距. 1 秒差距等于 3.26 光年，这意味着可观察宇宙的半径为

13,000,000,000 光年．这可以称作哈勃半径．

天文学家们还没有进入到哈勃半径的全程，但是他们正在接近它．据蒙特·帕洛马（Mount Palomer）提出，经天文学家马尔顿·施米特（Maarten Schmidt）测定，一个标示为 3C9 的天体，以 240,000 公里/秒的速度即光速的五分之四的速度退离．因此，这个天体离我们的距离为 100 亿光年稍多一点，是现在已知的最远的天体①．

如你们所看到的，可观察宇宙的半径大大地超过了阿基米德宇宙的半径；130 亿比 1.2．这个比值恰为 100 亿左右，当两个球体以体积相比时，体积随半径的立方而变．如果可观察宇宙的半径 $10^{10}$ 倍于阿基米德的宇宙，则前者的体积为 $(10^{10})^3$ 即 $10^{30}$ 倍于后者的半径．

如果填满阿基米德宇宙的砂粒的数目为 $10^{63}$，那末，填满可观察宇宙的大得多的体积所需要的数目为 $10^{93}$．

可是，究竟为什么总是缠着砂粒呢？阿基米德之所以利用砂粒是为了以最小可能的东西来填满最大可能的休积．实际上，他已把事情夸大了一点．如果一颐直径 0.5 毫米的罂粟子要包含 10,000 粒砂子的话，那末，每粒砂的直径必为 0.025 毫米，这是肉眼无法分辨的极其微细的砂粒．

我们可以做得更加好．我们现在已经知道阿基米德所不知道的原子，以及还有亚原子粒子．现在假定我们试图在这类物体中寻求可能的最小体积；不仅是体积，而且是最小可能的体积．

如果我们探求的是最小可能的质量，那末毫无问题，那就是电子的静质量，即 $9.1\times10^{-28}$ 克．任何具有质量的物体，其

① 1973 年探测到了距离达 120 亿光年的一个天体．原注．

质量都不会小于电子的质量．正电子的质量也小，但正电子只是电子的反粒子，换言之，即为电子（电荷）的镜像形式．

质量比电子小的粒子是有的．例如光子和各种中微子，但这些粒子的静质量均为零，所以完全不能叫做“具有任何质量的物体”．

这是什么道理呢？那就是说，电子还有一个独特的条件．它是能够携带电荷的质量最小的物体．静质量为零的粒子总是不带电的，因此，电荷的存在似乎要求有质量的存在——而质量不小于与电子相联系的质量．

电荷或许就是质量，而电子不是别的就是电荷——无论是什么样的．

还可以有一种粒子，例如质子，它的质量是电子的 1,836 倍，但电荷却是一样大．另外还有一种粒了，比如中子，其质量是电子的 1,838 倍，但完全没有电荷．

我们可以把这种质量大的、带电不足的粒子看做是由许多正负两种电荷所组成．它们或者大部分或者全部相互抵消，就质子而言多余一个正电荷，就中子而言没有不抵消的电荷．

可是，电荷怎么能够在质量不抵消的同时而彼此抵消呢？关于这一点没有人能回答．在对质子和中子内部结构的了解大大进展之前，这些问题也许就得不到解答．我们必须等待．

那末，体积又怎么样呢？

我们可以满有把握地谈论亚原子粒子的质量，但体积可就不同了．所有粒子都显示出波动性，和一切物质块相联系的是“物质波”，它们的波长同粒子的动量（即它们的质量和速度的乘积）成反比．

和电子相联系的物质波具有数量级为 $10^{-8}$ 厘米的波长，大约是一个原子的直径．因此，说电子是粒子，或者把它看作具有一定体积的、坚硬而又光亮的球体，都是不切实际的．由子有波动性，电子“散布”在它构成部分的原子内．有时它也“散布”在整个一组原子的范围里．

象光子和中微子那样没有质量的粒子，其波动性甚至更为显著，更不能说它有体积了．

如果我们继续探究质子（或者中子）的话，我们就发现一个有着将近 2000 倍于电子质量的物体，这意味着，如果所有其他方而都相等，那末，和质子和联系的物质波的波长应当约为和电子相联系的物质波波长的二千分之一

物质波紧密地围绕着质子，因此质子的粒子性增强了．质子可以看作一个粒子，人们可以说它有一定的体积，这是一个远比电子所“散布”的波长为小的体积．（可以肯定，如果质子能够放大到足以被看到的话，我们将会发现它有着一个边界不清晰的模糊的表面，因此其体积只是近似地“确定的”.）

假定我们进而研究质量甚至比质子更大的物体．物质波会不会靠得更紧，体积会不会甚至更小呢？比质子更重的亚原子粒子是有的．然而，它们全是极其短命的，我也还没有估计过它们的体积．

我们还可以组成许多质子和中子的堆集，它们稳定得足以进行研究．这就是各种各样的原子核．比如说，一个由 10 个质子和 10 个中子组成的原子核，在质量上将 20 倍于单个质子，而与原子核作为整体相连的物质波的波长也相应地短．这会不会使 20 个质子和中子的体积缩到比单个质子还小呢？

显然不会．当达到象质子那样重的物体时，它的粒子性是那么显著，以致它几乎可以作为一只微小的台球来看待．不

管有多少个质子和中子聚集在一个原子核里，各个质子和中子都仍保持其原来的体积不变．这意味着，质子的体积完全可以看做具有意义的最小体积．这就是说，你可以说有一个体积是“质子体积的一半”，但是你决计找不到这样的粒子或者波，它将填充这个体积而不重迭．

人们已经计算出各种原子核的大小．例如，已经计算出碳原子核的半径为 $3.8\times10^{-13}$ 厘米，铋核的半径约为 $8\times10^{-13}$ 厘米．如果一个核由几个不可压缩的中子或质子紧密装填的球体所构成，那末，两个这样球的体积应该是粒子数的立方根关系．碳核中粒子的数为 12（6 个质子和 6 个中子），而铋核中粒子的数为 209（83 个质子和 126 个中子）．粒子数的比为 209:12 即 17.4，17.4 的立方根则为 2.58，因此，铋核的半径应是碳核的 2.58 倍，而实际比值为 2.1．考虑测量的测不准性，这已经是不错的了．

接下来让我们把碳核同单个质子（或中子）作比较．碳核有 12 个粒子，而质子是独一无二的，比值为 12，其立方根约为 2.3，因此，碳核的半径应是质子半径的约 2.3 倍，于是，我们发现，质子半径约为 $1.6\times10^{-13}$ 厘米．

现在，我们可以把质子一个接一个地排列起来，看看有多少质子即可横贯整个可观察宇宙．我们只要用质子半径来除可观察宇宙的半径，即可得出答案．

可观察宇宙的半径为 130 亿光年即 $1.3\times10^{10}$ 光年，而每一光年长 $9.5\times10^{17}$ 厘米，将可观察宇宙半径以厘米表示，则为 $1.23\times10^{28}$．用质子半径（$1.6\times10^{13}$ 厘米）来除它，即得出答案：$7.7\times10^{40}$．

换句话说，如果有人问，“需要把多少个质子肩并肩地排

列起来？”，那可以回答：

“77,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000！”

因为再没有地位可以排下去了.

现在来看体积．如果质子有半径 $1.6\times10^{13}$ 厘米，并假定它是球形的，那末，它的体积为 $1.7\times10^{-40}$ 立方厘米，而这就是最小的可能体积．再给定可观察宇宙的半径为 $1.23\times10^{28}$ 厘米，则其体积为 $7.8\times10^{84}$ 立方厘米，这就是最大的可能体积.

我们下一步设想，用最小的可能体积来绝对紧密地（不留任何空间）装填最大的可能体积．如果我们用 $1.7\times10^{-40}$ 来除 $7.8\times10^{84}$，则我们发现，填满可观察宇宙体积所需要的质子数为 $4.6\times10^{124}$.

这就是阿基米德就“砂粒计算器”为他自己提出的那个问题的答案（按现代标准）．说也奇怪，这个现代的答案几乎恰恰为阿基米德解的平方.

然而，不管阿基米德在天空中的大黑板上处于什么位置，他都不必为此感到惭愧．他所做的不止仅仅截取一段数字来提出一个大数，他是在论证数学中的一个重要问题；这就是，可以设计出一种数制，它能够表达任何有限的但是大的数字．在这一点上他取得了完满的成功.

暖，我还没有做完．可观察宇宙里实在有多少质子呢？

“宇宙密度”的数值范围据估计为 $10^{-30}\sim10^{-29}$ 克/厘米$^3$（如果所有的宇宙物质全都是均匀地分布的话，则宇宙密度即为宇宙物质的数量）．这表示高度的真空，所谓高度真空意味着宇宙中实际上无物质．然而，宇宙里有为数巨大的立方厘米，甚至“实际上无物质”也在增加.

如我已经说过的那样，可观察宇宙的体积为 $7.8\times10^{84}$ 立方厘米，而如果宇宙密度不仅在最靠近我们的几十亿光年里，而且在全宇宙里都处处相等的话，那末，可观察宇宙中所包含的总质量为 $7.8\times10^{54}$ 克至 $7.8\times10^{55}$ 克．我们设想它处于这个范围的中间，就是说可观察宇宙的质量为 $3\times10^{55}$ 克．因为我们自己的银河系的质量约为 $3\times10^{44}$ 克，因此可观察宇宙中的质量足以构成 1,000 亿万（$10^{11}$）个象我们自己那样的星系．

这个质量实际上全都在宇宙中的核子即质子和中子里面．单个质子或中子的质量约为 $1.67\times10^{-24}$，这就是说，可观察宇宙中有 $1.8\times10^{79}$ 个核子那样多的质量．

作为初步近似，我们可以假定，宇宙仅由氢和氦组成，每有一个氦原子就有十个氢原子．氢原子核由单个质子组成，氦原子由两个质子和两个中子组成．因此，每十一个原子中，就有十二个质子和两个中子．所以宇宙中质子对中子之比为六比一，或者粗略地说，宇宙中有 $1.6\times10^{79}$ 个质子和 $0.2\times10^{79}$ 个中子．（可见，在几乎是虚空的可观察宇宙中的质子数目是阿基米德的装满宇宙砂粒数的 $10^{15}$ 倍．）

另外，每个质子与一个电子结合，因此宇宙中粒子的总数（假定有效数字里只包括质子、中子和电子）为 $3.4\times10^{79}$．

这里在可观察宇宙中作质子计算时，忽略了相对论性效应，一个星系离开我们越远，退离我们越快，它因菲兹杰诺（Fitzgerald）收缩而经受的缩短就越大（至少对于我们自己的观察眼睛来说是如此）．

现在假设有一个星系距离我们 100 亿光年，以光速五分之四的速度退离我们．再假设我们看到它徐徐移动以致它沿

视线方向的极端长度一般为 10 万光年，但由于缩短，我们将观察到的长度（假定我们能够观察到）仅仅是 6 万光年．

更远的星系看上去甚至缩得更短，而当我们接近 130 亿光年的哈勃半径时（此时，退离速度接近光速），由于缩短作用会使星系沿视线方向的厚度接近零．于是我们就有了一幅图景：在哈勃半径附近的都是些和纸一样薄和比纸更薄的星系．那儿总有空间可容纳无限多个这样的星系，它们全都挤聚在哈勃半径周围．

当然，在这些星系上的居民看来，这是没有错的．他们和他们的邻居都是些正常的星系，周围的空间则几乎是虚空的．可是，在他们的哈勃半径上，一定有无限多个比纸还薄的星系，包括我们自己！

因此，在一个几乎是虚空的宇宙有限体积里，毕竟可能有——看来是自相矛盾的，但可能是正确的——一个无限的宇宙，它有无限个星系、无限大的质量，而为了回到本文的中心点，就是说有无限多的质子．

这样一幅在有限的体积里无限宇宙的图象同宇宙的“大爆炸”理论并不一致，它预先假定宇宙开始时质量是有限的．不过，它符合于“连续创造”的宇宙，它需要一个无限的宇宙，但是有限的体积．

在观察结果影响下，天文学家越来越倾向于“大爆炸”，但是“连续创造”的乐观图景从感情上把我吸引了过去．

迄今我们还只能深入空间 100 亿光年，但是我热切地期待着．在我的有生之年，我们或许能够征服这最后 30 亿光年而达到可观察宇宙的边缘，并且设法获得有无限多个星系存在的某些迹象．

可是，这也许是不可能的．星系退离越快，从它们到达我

们的能量就越小，检测它们就越难．纸一样薄的星系可能是有的——但也许是无法检测的．

如果这些结果不能成为定论，那末，我除了信念之外将一无所剩．而我的信念就是这样——宇宙是无界的和无限的，界限将永远、永远、永远不会没有人去对付和克服．[①]

① 哎呀，自从本文初次发表以来的那些岁月里，“连续创造”理论差不多已经销声匿迹，积聚着的星系也没有出现趋向边缘的迹象——但是我保留我的信念．原注．

# 第七部分

# 数和地球

# 15 水，水，到处都有——

我成年后有一次沉迷在航海之中，但那次不是自愿的．[1]一些和蔼的军曹把各种各样身着士兵服的青年赶到了一条船上，我就是这些青年中的一个．

我实在不想离开陆地（因为我是一个最胆小的和没有经验的水手，不过是来凑数的），想把这个想法告诉军曹们．然而，他们似乎被肩负的重任弄得那么忧心忡忡，为不得不勉为其难地担起要别人做些什么的任务而那么郁郁寡欢，因此我便不忍心去告诉了．我害怕他们要是发觉有一个士兵实在不愿意去的话，他们会哭起来的．

这样我就上了船，我们便开始了从旧金山到夏威夷历时 6 天的航行．

这不是一次舒适的航行．铺位有四层高，士兵也就这样睡．晕船蔓延，而我自己虽然没有晕过一次船（以我作为一个科学小说作家的名誉担保），但当铺位上面的张索肯定起作用的时候，这也没有什么了不起了．

我第一夜受到的打击最难受．我整日在应付船的颠簸，急切地等待着就寝时间．就寝时间一到，我就钻进了并不舒适的床铺，突然意识到：夜里并没有离开海洋呀！船整夜都在颠簸，前后摇，左右摇，起伏，横摇，要不整夜就象傻瓜似的！每夜都是如此！

这样，你很可能会想到，由于这种种原因，我促使这次航

① 本文最初发表于 1965 年 12 月．自那时以来我已经航海过多次，每次都是自愿的，每次都很愉快．原注．

行骇人听闻地沉默，而我在船上的所有乘员当中由于性情乖戾而最引人注目.

只有一次例外．第三天整日下雨．你们以为这没有什么可奇怪的吗？不要忘记，我是个没有出过海的人．我从来没有见过海上下雨，我也从来没有想象过海上下雨，而现在我看到了一个完全是徒劳的事，那么多水倾泻下来化为乌有，只是降下了更多一些水而已.

认为这是徒劳的想法，认为大自然的这种无效的和完全荒谬的安排，使雨水落在海洋里，强烈地冲击着我．使我哈哈大笑起来，笑声接连地发出，我立即走到下甲板，欣喜若狂，发疯地笑着，手舞足蹈，冲淋着雨水.

一个军曹（或者其他一个人）走来，带着温暖和体贴的同情对我说:“士兵，你到底怎么啦？你就这样站立着!”

而我所能说的只是:“天在下雨！雨下在海洋里!”我整天地为此傻笑着，那天夜里我四邻的睡铺都空着．人们可能在说（我猜想）我发疯了，随时可能杀人.

但自那以后，我常常觉着，我不应该笑，我当时应当哭.

我们这里东北部几个州正遭受严重的干旱 ①，当我想到海洋上的雨水，想到要是在干旱土地上的某些她方能用上一点这些雨水该多好的时候，我可能立刻就会哭起来.

那时，我将尽可能通过谈论水来安慰自己.

实际上，地球上现在不缺水，将来也永远不会缺水．其实，如果天气继续趋向转暖，覆盖的冰层溶融的话，则我们正

① 请记得，这是 1965 年．自那时以来再没有干旱过．原注.

处于严重的和持续的水过多的危险之中．[①]

不过我们此刻不必忙于为覆盖冰层的融化担忧，还是让我们来考查一下地球的水源吧．首先，地球上有海洋．我之所以把海洋这个名词用单数，这是因为实际上地球上只有一个世界海洋；这是一大片咸水，各个大陆象大岛一般地座落在上面．

这个世界海洋的总的表面积为 139,480,000 平方英里，而整个地球的表面积为 196,950,000 平方英里．[②]这样你就知道，这个世界海洋覆盖着地球表面的百分之七十一．

这个世界海洋之所以被任意地分成比较小的单元，部分原因是因为在早期探险中人们不知道是一个单一的海洋，直到 1519～1522 年麦哲伦（Magellan）探险队的环球航行才首次清楚地证明了这一点．另一方面是因为各大陆把这个世界海洋分成各个相连部分便于个别称呼．

习惯上，人们都听到“七大洋”的说法．的确，我的地球仪和各种版本的地图册都把世界海洋分成七个部分：（1）北太平洋，（2）南太平洋，（3）北大西洋，（4）南大西洋，（5）印度洋，（6）北冰洋，（7）南冰洋．

除此之外，还有比较小的海、海湾和大海湾．它们或者是洋的一部分，这一部分几乎被陆地包围起来，如地中海或墨西哥湾．或者是被一列岛屿从洋的主体划分出来的一部分，如加勒比海或者南中国海．

让我们把这种划分方法尽可能地简化一下．首先，我们

---

① 这里我显得落后了，实际上，自 1940 年以来，我们一直经历着转冷的趋势．原注．

② 如果我今天写本文的话，我得用“平方公里”作为单位，但现在更改就显得麻烦了．只要记得 1 平方英里等于 2.6 平方公里，知果你需要的话，那你自己改吧．原注．

把所有的海、海湾和大海湾看做与它相连的那个洋的一部分；我们可以把地中海、墨西哥湾和加勒比海算做北大西洋的一部分，而南中国海看作是北太平洋的一部分．

其次，北太平洋和南太平洋，或者北大西洋和南大西洋，从地球物理上来说都没有分界线（任意约定的分界线都是赤道）．因此，我们就把它们作为单一的太平洋和单一的大西洋来看待．

第三，如果看一下地球仪就会发砚，北冰洋不是真正独立的洋．它是大西洋的一个分支，通过格陵兰和挪威之间的一条一千英里宽的水域（挪威海）与大西洋相连．因此，我们把北冰洋归入大西洋．

第四，南冰洋并不存在．这个名称是给在南极洲周围的水域航行用的（它只是地球的这样一个部分：人们不受陆地或者整片冰层阻碍能够在那里沿纬度作环球航行）．在这片水域和它北边的那些大洋之间，并没有任何特定的边界．任意边界的长度可以通过在那些较大的洋中间划分出南冰洋而加以缩短．

于是，世界海洋剩下的三大部分是：太平洋、大西洋和印度洋．

看一下地球仪就会发现，太平洋和大西洋都从北极地延伸到南极地．它们在北部的分界是泾渭分明的，因为唯一的通道就是阿拉斯加和西伯利亚之间的狭窄的白令海峡．横过这片水域可以划一条 56 英里长的任意短线把这两个洋分隔开．

## 海　　洋

如正文已提到的，海洋覆盖着地球表面的百分之七十一．不过我们所看到的当然只是它的表面．

海洋平均深2.3英里（3.7公里），有些地方则深过7英里（11公里）．海洋总体积约为3亿立方英里（12亿立方公里）．这就是说，如果造一个方桶要把海水全都灌进去，那末，如桶的每边长36英里（85公里），则桶壁要有到月球那样的高度，才能把水全部装进去．

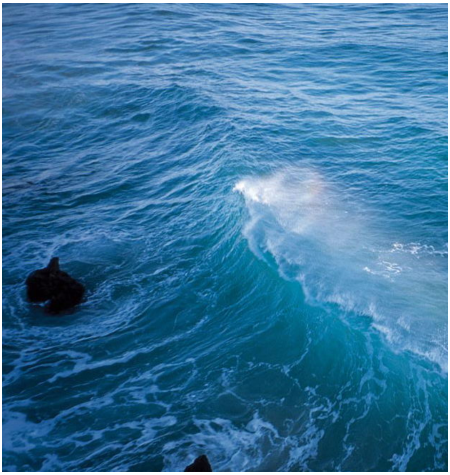


图25 海洋

海水不是纯净的水，而是各种物质主要是盐的溶液．事实上3.45％的固体中大部分是盐，这就是说，大约有5.4亿亿吨固体溶解在海洋中，如果能够用某种方法把它们全部分离出来，并均匀地铺在五十个州上，那末，它将成为$1\frac{1}{2}$英里（$2\frac{1}{2}$公里）高那样一个大堆．

海洋中所包含的固体不单单是盐，这些固体中大约有七分之一是包含地球上每一种元素的各种各样物质，——有些元素存在量比较大，有些比较小．海洋中甚至象铀和金那样的物质也是其正常含量的一部分．每一吨海水，约有千分之十盎司的铀，约有百万分之五盎司的金．铀和金的含量这样稀薄，以致想把这些金属浓缩而从海水中提取出来，是不切实际的．然而，海洋是那样浩瀚无垠，总含量是很大的：海洋总共蕴藏着50亿吨铀和8百万吨金．

海洋还含有溶解在其中的气体．氧仅微溶于水，但海水中的氧已足够供养它所负担的全部生物．

但在南部的分界就不那么清楚了．必须从南美洲的最南端到南极半岛的最北端穿过德雷克（Drake）海峡划一条任意

的分界线．这条线大约有 600 英里长．

印度洋是个粗而短的海洋，仅仅从热带地区延伸到南冰洋（它比瘦长的大西洋宽，以弥补其不足）．印度洋不大容易同其他海洋分开．从非洲的最南端和澳大利亚的最南端到南冰洋的南北向分界线，将把印度洋分别同大西洋和太平洋区分开，其中第一条线大约长 2,500 英里，第二条长 1,800 英里．它构成了相当模糊的分界线，但我已讲过，实际上只是一个海洋，另外，印度尼西亚群岛也把太平洋同印度洋分隔了开来．

根据这些约定，这三大洋的表面积以近似数表示如下：

表 3　海洋的面积

| | 表 面 积（平 方 英 里） | 占世界海洋的% |
|---|---|---|
| 太　平　洋 | 63,000,000 | 48.7 |
| 大　西　洋 | 41,000,000 | 29.8 |
| 印　度　洋 | 30,000,000 | 21.5 |

可见，太平洋差不多是大西洋和印度洋加起来一样大．太平洋本身又比全部地球陆地面积大百分之二十．它是个巨大的水球．

当我横渡太平洋时（无论如何也只过了一半），我感到了这一点，而当我注视着所有这些水，只是在仅看到它的表面时，我也感觉到这一点．

太平洋不但跨域最大，而且也最深，平均深度约为 2.6 英里．相比之下，印度洋平均深度约为 2.4 英里，大西洋则仅约 2.1 英里，因此我们可以算出不同海洋的体积，如表 4 所示．

正如你所看到的，世界海洋的水恰巧以大约为 2:1:1 的比分布在三大洋之中．

总数达 339,000,000 立方英里是个相当可观的数量．它是地球体积的 $\frac{1}{800}$——一个十分大的分数．如果把它全部堆积在一起，则将形成一个直径约为 864 英里的球体．这个球体比太阳系中的任何一个小行星都大，或许比所有这些小行星加在一起还要大．

表 4　海洋的体积

| | 体 积（立 方 英 里） | 占世界海洋的% |
|---|---|---|
| 太 平 洋 | 177,000,000 | 52.2 |
| 大 西 洋 | 87,000,000 | 25.7 |
| 印 度 洋 | 75,000,000 | 22.1 |
| 总 计 | 339,000,000 | |

因此，水是不会短缺的．如果把所有海洋按地球上的人口分配，则每个男人、女人和孩子都将获得十分之一立方英里的海水．要是你认为这不算多的话（怎么只有可怜的一立方英里的十分之一），则请考虑一下，它是等于 110,000,000,000 加仑．

当然，海洋里都是些用途有限的海水．人们可以在上面航行，可以在海水中游泳——但是不能（未经处理）喝，不能浇草坪，不能用它来有效地洗涤，或者把它用在工业生产过程中．

必须用淡水来做这些必不可少的工作，而现成的这种水源是十分有限的．海洋的水（包括很少的一部分内海咸水）是地球上全部水量的 98.4%左右，而淡水仅为 1.6%，或者说，仅约 5,800,000 立方英里．

听起来这并不算太坏，但我的话还没有讲完．淡水存在于三相之中：固相、液相和气相．（让我打断一下自己的话，顺便提一下，水是地球上唯一以全部三相存在的常态物质，也是唯一的主要以液相存在的物质．所有其他常态物质要么仅仅以气态存在，如氧和氮；要么仅仅以固态存在，如硅和赤铁矿．）地球上的淡水源在三相间的分布如表 5 所示：

表 5　淡 水 源

| | 体 积（立 方 英 里） |
|---|---|
| 冰 | 5,680,000 |
| 液态淡水 | 120,000 |
| 水蒸汽（以冷凝成液体计） | 3,400 |

地球上的淡水源大都由于结成冰而不能供我们应用．当然，把冰溶化完全是可能的，而且甚是简便，但有个所处位置的问题．世界上的冰几乎百分之九十聚成覆盖在南极洲的巨大冰层，其余的则大多覆盖在格陵兰的比较小的冰层．剩余下来的（约有 200,000 立方英里）就是高山上的冰川和较小的北极诸岛，再加上地极海冰，所有这些冰都是十分奇特的．

这样我们就只剩下 125,000 立方英里的液体和气体形式的淡水，这是地球上水源中最可宝贵的部分，淡水源不断地通过滚动的河流和渗漏的地下水流失到海里，或者蒸发在空气中．不过，这个损失不断地为雨水所补偿．据估计，世界全部陆地面积上的总降雨量达到每年 30,000 立方英里之多．这就是说，每年有四分之一的淡水源更换．如果世界任何地方都不下雨的话，地球上干燥的陆地将真正变成干涸，因为在四年内淡水就会全部丧失掉（假定流失、渗漏和蒸发的速度保持不变的话）．

如果地球上的淡水是均匀地分配给人们的话，那末每个男人、女人和孩子都将得到 40,000,000 加仑，而且他每年可以使用其中的 10,000,000 加仑，同时须有雨水的积聚补偿.

可是淡水并不是均匀分布的．地球上有些地区的水源远远超过它们所能耗用的数量，而另一些地区则干涸异常．分布不匀既是时间上的，也是空间上的；因为一个地区今年水涝，明年就可能干旱.

最了不起的淡水储存库是世界上的湖泊．当然，并不是所有封闭的水体都是淡的．只有那些具有通往海洋出口的水体是淡的，因为这些水体流出的水会把从陆地溶解出来而进入湖泊的盐分带走．没有通往海洋出口的湖泊，只能通过蒸发失去水分，但溶解的盐分不会蒸发，向这个封闭水体供水的河流又不断地把盐分带进来，结果就形成了一个咸水湖，有时会比海水还要咸得多.

实际上世界最大的内陆水体是位于苏联和伊朗之间的里海——不是淡水．它的面积有 169,381 平方英里，刚好同加利福尼亚差不多大，它有 3,370 英里长的海岸线.

间或有人说里海不是一个海，只是一个湖泊，是个非常大的湖泊．但是，我似乎觉得，“湖泊”很可能只限于封闭的淡水体．如果称“海”意指咸水，那就不管是不是海洋了．这样说来，里海的确是里海了.

里海只有 0.6%的盐分（海洋的含盐量为 3.5%)，但这已足以使得里海的水除了西北角由伏尔加河注入淡水而外，都变得不可饮用了.

里海以东大约 150 英里的地方是咸海，含盐量约为 11.1%．它的盐分是里海的两倍，但它的范围要小得多，表面积仅约 26,000 平方英里——但这已足以使它成为世界上第

四个大的封闭水体.

著名的封闭咸水体还有两个. 一个是大盐湖（我更喜欢叫它犹他海，因为它既不“大”，而且根据我的定义也不是一个湖），另一个是死海. 大盐湖的面积只有 1,500 平方英里，而死海更加小——370 平方英里. 死海事实上比纽约市的 5 个行政区大不了多少.

但是，这两个比较小的水体由于其极咸而仍居于特殊的地位，大盐湖的盐分约为百分之十五，死海的约为百分之二十五，分别为海洋的四倍和七倍.

但是，仅看水的表面可能会使人产生错觉. 这四个内陆海有多深呢？我们根据深度的数据即可计算出每个海的体积及其总的含盐量[①]，如表 6 所示：

表 6 内 陆 海

| | 平均深度（英尺） | 体 积（立方英里） | 总 盐 量（吨） |
|---|---|---|---|
| 里 海 | 675 | 21,600 | 600,000,000,000 |
| 咸 海 | 53 | 260 | 13,000,000,000 |
| 死 海 | 1,080 | 75 | 86,500,000,000 |
| 大 盐 湖 | 20 | 5.7 | 4,000,000,000 |

由此可见，这个小死海毕竟不是那么小的. 就水的数量而言，它比大盐湖大得多，它的含盐量是从外表看起来比它大得多的咸海的 6 倍半.

## 死 海

死海也许是世界上最著名的小水体，虽然《圣经》中提到过它（毕竟古代和现代的以色列人都住在它的附近），但从来没有称它

① 这盐无论如何不完全是氯化钠，而是另一种物质. 原注.



图 26 死海

为死海．后代的希腊地理学家们感到水中无生物，故取名死海．在《圣经》里它叫盐海．

约旦河（世界上最有名的小河）流入死海，再往下进入大裂谷，后者正逐渐地使东非脱离大陆的其余部分，有朝一日将形成一个以现在的红海为主体的新海洋．在进入死海时，约旦河比海平面低 1,286 英尺．死海沿岸是地球上最低的地区．尽管如此，死海水面以下的最大深度还有 1,310 英尺．如果将死海及其周围地区的水位提高到海平面水位的话，那末，水的最大深度为 2,600 英尺，即恰为半英里左右．

死海被一个从东岸伸入其中的小半岛分成两个不相等的部分，占全部面积三分之二左右的北部是深水部分，余下三分之一的南部非常浅，深度从 3 英尺至 30 英尺．

有人猜测，浅的三分之一部分是由于一次地震的结果被水淹没的．地震毁坏了防御北部湖水的堤坝，这次地震可能伴随着一次火山喷发，南部在干涸时发生过沉降．简言之，这说明了《圣经》

上所描述的罪恶之地和罪恶之城毁灭的原因，但是，这并没有什么具体的证据.

还是让我们回到真正的湖泊——封闭的淡水体上来吧.就表面积而言，最大的这种水体是美国苏必利尔（Superior)湖，它差不多同南卡罗来纳州一样大，通常列为地球上第二大封闭水体（虽然，如我将表明的，实际上不是这样）. 诚然，它比巨大的里海小得多，面积还不及它的五分之一，但是不要忘记，苏必利尔湖的水是淡的.

不过，苏必利尔湖仅仅是美国五大湖之一. 这五大湖通常看做为独立的水体，但是它们是毗连和相互连通的. 因此，把它们看做一起构成了的一个巨大的淡水流域，倒实在是非常合适的. 有关这些湖泊的一些统计数字见表 7:

表 7　美国的大湖

| | 面　积<br>(平方英里) | 大小等级 | 平均深度<br>(英尺) | 体　积<br>(立方英里) |
|---|---|---|---|---|
| 苏必利尔湖 | 31,820 | 2 | 900 | 5,400 |
| 休伦(Huron)湖 | 23,010 | 5 | 480 | 2,100 |
| 密执安(Michigan)湖 | 22,400 | 6 | 600 | 2,600 |
| 伊利(Eric)湖 | 9,940 | 12 | 125 | 240 |
| 安大略(Ontario)湖 | 7,540 | 14 | 540 | 770 |
| 总　　计 | 94,710 | | | 11,110 |

如果把它们本来就可以作为一个整体来看待的话，则美国五大湖的表面积和体积是里海的一半多一点. 它们的容量为全地球总淡水源的近十分之一.

唯一能够勉强地跟美国大湖相比的另一组湖是东非的一系列类似的、但比较分开的湖. 三个最大的湖是：维多利亚湖，

表 8　非洲的大湖

| | 面　　积<br>(平方英里) | 大小等级 | 平均深度<br>(英尺) | 体　　积<br>(立方英里) |
|---|---|---|---|---|
| 维多利亚(Victoria)湖 | 26,200 | 3 | 240 | 1,200 |
| 坦噶尼喀(Tanganyaka)湖 | 12,700 | 8 | 1,900 | 4,500 |
| 尼亚萨(Nyasa)湖 | 11,000 | 10 | 1,800 | 3,800 |
| 总　　　　　计 | 49,900 | | | 9,500 |

坦噶尼喀湖和尼亚萨湖，我把它罗列在一起，作为非洲大湖．表 8 中是一些统计数字．

非洲的大湖以其深度著称（至少其中两个）．虽然它们占的面积只比美国大湖的一半多一点，但是它们容纳的淡水量几乎可以和美国的那些较大但较浅的湖的现存水量相匹敌．

但是，如果我们要讲到深水湖的话，那末，我们就要提到西伯利亚中南部的贝加尔（Baikal）湖，它的面积为 13,197 平方英里，按照通常的表面积准则，居地球第七大封闭水体，而平均深度为 2,300 英尺，所以是世界上最深的湖．(它的最大深度为 4,082 英尺，将近 1 英里．它是那样的深，有一次我曾经说过，这湖是唯一拥有跟深海鱼一样的鱼的湖．果真是这样的话，这便是世界上仅有的淡水深海鱼．)

它的深度意味着，贝加尔湖有 5,750 立方英里淡水，超过苏必利尔湖的水容量．

剩下来唯一可以归入“大湖”之列的湖是加拿大西部的三个湖，有关这些加拿大大湖的平均深度的统计数字实际上目前还没有掌握．我有其中两个湖的最大深度的数字，但有关第三个湖则一无所知．我将作出一些有智慧的猜测，以观其梗概．请见表 9．

现在我们根据封闭水体的实际大小和水容量而不是根据

表 9　加拿大的大湖

| | 面　　积<br>(平方英里) | 大小等级 | 平均深度<br>(英尺) | 体　　积<br>(立方英里) |
|---|---|---|---|---|
| 大熊(Great Bear)湖 | 12,200 | 9 | 240 | 525 |
| 大奴(Great Slave)湖 | 10,719 | 11 | 240 | 510 |
| 温尼伯(Winnipeg)湖 | 9,460 | 13 | 50 | 90 |

其表面积把它们依次排列起来．诚然，任何湖泊的表面积可以用足够的精确度来加以确定，而水容量则只能大致地估计，因此按表面积递减的次序来排列是有道理的．但是，我将我行我素．14 个最大的封闭水体（按表面积计）按水容量多少次序排行如表 10 所示．

表 10　地球上的大湖

| | 体　　积<br>(立方英里) | | 体　　积<br>(立方英里) |
|---|---|---|---|
| 里海 ① | 21,600 | 维多利亚湖 | 1,200 |
| 贝加尔湖 | 5,750 | 安大略湖 | 770 |
| 苏必利尔湖 | 5,400 | 大熊湖 | 525 |
| 坦噶尼喀湖 | 4,500 | 大奴湖 | 510 |
| 尼亚萨湖 | 3,800 | 咸海② | 260 |
| 密执安湖 | 2,600 | 伊利湖 | 240 |
| 休伦湖 | 2,100 | 温尼伯湖 | 90 |

此表非但是非常粗略的，有些数字粗略得不足信，而且除此之外还有些湖虽然面积比表所列的湖小，但深度却足以使其列在温尼伯湖之前的位置．属于这些湖的有苏联欧洲部分西北部的拉多加（Ladoga）湖和奥涅加（Onega）湖，以及玻利维亚和秘鲁之间安第斯（Andes）山的的的喀喀（Titicaca）湖．

可是这有什么用呢？这一切关于水的议论丝毫无补于干

①② 非淡水湖．原注．

涸的东北部．实际上，我知道美国大湖的水位近年来一直在令人担忧地下降着，甚至里海也在缩小．

地球老母亲也许现在对我们感到厌烦了……我不知道，在我心情更为忧郁的时候，我能不能责怪于她，如果她存在的话．

## 16 地球上的高处和低处

波士顿正在改建，我们现在有了个“新波士顿”．①

新波士顿显著的特征在于那个普鲁登谢尔（Prudential）中心，地处巴克贝（Back Bay）区，经过改造面貌一新，犹如纽约一般豪华．它有一家新饭店即谢拉顿-波士顿（sheraton-Boston）饭店，而最壮观的是有一幢漂亮的摩天大楼，就是高 750 英尺的 52 层的普鲁登谢尔大厦．

1965 年夏，我第一次进入这个中心．我应邀参加一个小组讨论会，研究未来的工业管理问题．讨论会在陈设华丽辉煌的谢拉顿-波士顿饭店举行．在会后的宴会之后，饭店经理在他简短的谈话中声称，普鲁登谢尔大厦是北美大陆最高的办公大楼．

听后我们流露出惊讶的神情，于是他立刻解释道，是的，离波士顿不远的地方的确有些更高的办公大楼，可是它们都不在北美大陆，而在大陆海岸外的一个岛上，一个名叫曼哈顿（Manhattan）的岛．

他说得对．在写作本文的当时，北美洲在曼哈顿岛以外

① 本文最初发表于 1966 年 2 月，那时我住在波士顿地区，但在 1970 年我迁居到纽约，自那以来我一直住在纽约．原注．

的地方，还没有比普鲁登谢尔大厦更高的办公大楼．(也许全世界任何地方都没有．) ①

这使我马上觉得，如果你是一个最高记录收集者（象我一样），那末，只要稍微改变一下限制条件，就可以玩出大量的游戏．在那位经理的谈话结束之前，好多时间里我一直在考虑着山脉．

每个人都知道世界上最高山峰的名字，它就是珠穆朗玛峰，正好位于尼泊尔和中国西藏交界处的喜马拉雅山脉．

参考书里通常说珠穆朗玛峰的高度是海拔 29,002 英尺，虽然我更相信最近的三角测量得出这个数字为 29,141 英尺．无论哪一个数字，看上去摇摇晃晃的珠穆朗玛峰之巅都算得上是地球表面上唯一超过海拔 29,000 英尺的一块坚硬的土地，因而这座山完全称得上是独一无二的了．如果用另外一种量度单位，则珠穆朗玛峰恰恰有五英里半多一点高，而所有其他土地都低于海拔五英里半．

然而，除了"盎格鲁撒克逊国家"的成员之外，山的高度一般都以米而不是英尺或英里来表示．②1 米有 3.28 英尺，因此珠穆朗玛峰高出海面 8,886 米．③

这马上就产生了一个问题：到底还有多少座山峰属于高过海拔 8,000 米的、为数极少的最高的山之列呢？回答是：不多，只有 13 座！④

---

① 自从本文发表以来，芝加哥已经建成了两座比普鲁登谢尔大厦还要高的办公大楼．原注．

② 如今．甚至连盎格鲁撒克逊的国家也都在加入统一的行列了．现在，只有美国是唯一仍坚持不改的重要国家．原注．

③ 我国最近测量珠穆朗玛峰的高度为 8,848 米．译者注．

④ 我现在不再象当初写文章时那样地相信原来的这种说法了．《吉尼斯（Guiness）世界资料手册》称，迦雪布鲁姆（Gasherbrum）峰是第 15 高峰．如果是这样的话（我信任吉尼斯），那么，至少有四座 8,000 米高的山峰我没有列入此表，这些资料在我的藏书中找不到．原注．

表 11　8000 米以上的山峰[①]

| 山　　峰　　名 | 高 | 度 | |
|---|---|---|---|
| | 英　尺 | 英　里 | 米 |
| 珠穆朗玛峰 | 29,141 | 5.52 | 8,886 |
| 乔戈里峰 | 28,250 | 5.36 | 8,613 |
| 干城嘉措(Kanchenjunga)峰 | 28,108 | 5.33 | 8,570 |
| 洛子(Lhotse)峰 | 27,923 | 5.29 | 8,542 |
| 马卡鲁(Makalu)峰 | 27,824 | 5.28 | 8,510 |
| 道拉吉利(Dhaulagiri)峰 | 26,810 | 5.10 | 8,175 |
| 玛纳斯鲁(Manaslu)峰 | 26,760 | 5.06 | 8,159 |
| 卓奥友(Cho Oyu)峰 | 26,750 | 5.06 | 8,155 |
| 南迦帕尔巴特(Nanga Parbat)峰 | 26,660 | 5.05 | 8,125 |
| 安那普纳(Annapurna)峰 | 26,504 | 5.03 | 8,080 |
| 迦雪布鲁姆(Gasherbrum)峰 | 26,470 | 5.02 | 8,075 |
| 布罗德(Brood)峰 | 26,400 | 5.00 | 8,052 |
| 高僧赞(Gosainthan)峰 | 26,291 | 4.98 | 8,016 |

这里把它们列于表 11．

这 13 座最高的山除 4 座外全都在绵延三百英里多一点的喜马拉雅山脉．例外的山中，最高的是乔戈里峰，有时它只是简单地被叫做 K-2．

乔戈里峰位于珠穆朗玛峰和其他喜马拉雅山峰西北面大约 800 英里的地方．它是逶迤在克什米尔和中国新疆之间的喀喇昆仑山脉的最高峰．

全部 13 座 8000 米的高峰都在亚洲，而且都在印度和中

① 根据我国掌握的资料和公布的数据，世界上海拔 8,000 米以上的山峰有十四座，它们依次是珠穆朗玛峰（8,848 米），乔戈里峰（8,611 米），干城章嘉峰（8,585 米），洛子峰（8,501 米），珠穆伦错峰（又名玛卡鲁峰，8,470 米），道拉吉利峰（8,172 米），卓奥友峰（8,153 米），玛纳斯鲁峰（8,126 米），南迦帕尔巴特峰（8,125 米），安那普纳峰（8,078 米），迦雪布鲁姆一号峰（8,068 米），布罗德峰（又名宽大峰，8,047 米），迦雪布鲁姆二号峰（8,035 米），希夏邦马峰（又名高僧赞峰，8,012 米）．译者注．

国的边陲.

实际上，不仅世界上 13 座最高的山峰是在这地方，而且至少 60 座最高的山（!）也在这地方，因此这个地区是登山者之地. ①

而在所有的山中，珠穆朗玛峰显然是攀登之峰. 攀登这座山的第一次认真的尝试是在 1922 年，经过整整一代人的努力之后，有十一个人在山坡上丧生，未曾取得成功. 后来在 1953 年 6 月 29 日，尼泊尔人谢帕·田津·诺盖（Sherpa Tenzing Norgay）和新西兰人埃德蒙·珀西瓦尔·希勒利（Edmund Percival Hillary）征服了它. 自那以后，还有一些人也成功了. ②

你们或许会认为，连珠穆朗玛峰也征服了，就再也没有什么山没被登上过的了. 然而事情并不是这样，珠穆朗玛峰要比其他一些峰受人注意. 到现在为止（除非有人在悄悄地攀登，而我没有注意到），尚未被征服的最高的山峰是高僧赞峰，它仅列为第十三高峰. ③

亚洲以外最高的山脉是沿着南美洲西侧南下延伸的安第斯（Andes）山脉，安第斯山脉的最高峰是阿空加瓜（Aconcagua）山，高 22,834 英尺. 虽然阿空加瓜山是亚洲以外世界最高的山峰，但在亚洲还是有许多更高的山峰.

作为资料，这里把各大陆最高的山峰列于表 12 示出. 为

① 最近我听说，喜马拉雅山脉有世界上 108 座最高山峰中的 96 座. 原注.

② 1960 年 5 月 25 日，中国登山队首次从北坡攀登珠穆朗玛峰顶；嗣后于 1975 年 5 月 27 日中国登山队再次从北坡胜利登上峰顶. 译者注.

③ 《吉尼斯世界资料手册》说它是迦雪布鲁姆峰. 第十五高峰. 原注.
我国登山队于 1964 年 5 月首次登上了第十四高峰——希夏邦马峰，从那时起，世界上 8000 米以上的高峰就全部被人征服了. 作者在文中写的可能是以前的情况，可供参考. 译者注.

表 12　各地区最高的山峰

| 地　区 | 山　　　峰 | 高度 英尺 | 高度 英里 | 高度 米 |
|---|---|---|---|---|
| 亚洲 | 珠穆朗玛峰 | 29,141 | 5.52 | 8,886* |
| 南美洲 | 阿空加瓜山 | 22,834 | 4.34 | 6,962 |
| 北美洲 | 麦金莱(McKinley)山 | 20,320 | 3.85 | 6,195 |
| 非洲 | 乞力马扎罗(Kilimanjaro)山 | 19,319 | 3.67 | 5,890 |
| 欧洲 | 厄尔布鲁士(Elbrus)山 | 18,481 | 3.50 | 5,634 |
| 南极洲 | 文森・马西夫(Vinson Massif)山 | 16,860 | 3.19 | 5,080 |
| 48 个州 | 惠特尼(Whitney)山 | 14,496 | 2.75 | 4,419 |
| 澳洲 | 科休斯科(Kosciusko)山 | 7,328 | 1.39 | 2,204 |
| 新英格兰 | 华盛顿(Washington)山 | 6,288 | 1.19 | 1,918 |

* 见 242 页注.

了安抚我的民族和地域自尊心，我加上了位于 48 个相邻的州和新英格兰的最高峰.（毕竟这一章节是我在撰写，可以随我所好.）

现在来看看这些山的位置.

阿空加瓜山在阿根廷，紧靠智利边界，在瓦尔帕莱索（Valparaiso）以东只有 100 英里的地方.

麦金莱山在阿拉斯加的中南部，在费尔班克斯西南大约 150 英里的地方. 人们在 1896 年发现它是北美洲的最高地，并以刚刚当选为美国总统的威廉・麦金莱（William McKinley）① 来命名，俄国人（他们在 1867 年之前拥有阿拉斯加）称它为“布尔莎娅”（Bolshaya，“大的”）山.

乞力马扎罗山在坦噶尼喀东北部，靠近肯尼亚的边境，离印度洋大约 200 英里. 厄尔布鲁士山属高加索山脉，位于黑海东北方向约 60 英里的地方.

① 美国第 25 任总统，公元 1897～1901 年在位. 译者注.

关于文森·马西夫山，哎呀，我实在一无所知．就是它的高度也是粗略估计出来的．

惠特尼山在加利福尼亚州，位于国家红杉公园东侧．它在48个州中的最低点所在地死谷西面只有80英里的地方(这个最低点是一个称为坏水的池塘，比海面低280英尺——我敢打赌它是这样的)．惠特尼山是以在1864年测量其高度的美国地质学家乔赛亚·德怀特·惠特尼(Josiah Dwight Whitney)命名的．

科修斯科山在澳大利亚的东南角，位于维多利亚（Victoria）州和新南威尔士（New South Wales）州的交界上．它是那个称为澳大利亚阿尔卑斯（Alps）的山脉的最高点．我猜测它是在十八世纪末波兰爱国者撒迪厄斯·科修斯科（Thaddeus Kosciusko）在领导最后一次几乎是无望的波兰独立战争时所发现的，但我还不能肯定．

华盛顿山位于新罕布什尔(New Hampshire)州北部的总统山脉，我们大家都知道它是以谁命名的．

我列举了大陆上的高山，但这并不是说所有的高山都在大陆上．事实上，澳大利亚一般通认为大陆（虽然是个小大陆）但并没有什么特别高的山，而它北边的新几内亚（虽然很大，但无疑是一个岛)，却是个多山的地方，有几十个比澳大利亚大陆的任何山都高的山峰，其中有一些以任何标准来衡量都是非常了不起的．三个太平洋海岛特别多山，择其高者列于表13．

卡斯滕士山是世界上非大陆的最高山．我不知道是以谁命名的．不过它在新几内亚西部，是纳索（Nassau）山脉的一部分，后者是以荷兰皇族命名的．我猜想，印度尼西亚现在已经把这山脉和这山重新命名了，或者更可能地是，已经恢复了原

表 13　海岛上的主要山峰

| 海　岛 | 山峰 | 高 | 度 | |
|---|---|---|---|---|
| | | 英　尺 | 英　里 | 米 |
| 新几内亚 | 卡斯滕士(Carstensz)山 | 16,404 | 3.12 | 5,000 |
| 夏威夷 | 莫纳科亚(Mauna Kea)山 | 13,784 | 2.61 | 4,200 |
| | 莫纳洛亚(Mauna Loa)山 | 13,680 | 2.59 | 4,171 |
| 苏门答腊 | 克林季(Kerrintji)山 | 12,484 | 2.36 | 3,807 |
| 新西兰 | 科克(Cook)山 | 12,349 | 2.34 | 3,662 |

来的名字，但我不知道这些名字叫什么. ①

科克山就在新西兰南岛中心略偏西的地方，当然，它是以著名的探险家科克（Cook）船长命名的，它的毛利语名字是奥兰吉（Aorangi）.

到此，我所讲到的山的高度都是“海拔”高度.

可是，如果不忘记谢拉顿-波士顿饭店经理的话，那末，我们不妨再作些说明，以增加我们的兴趣.

一座山的高度毕竟在很大程度上取决于它基底的高度. 喜马拉雅山的群峰大多是世界上最高的，这是毋庸置疑的. 然而，同样也是确凿无疑的是，它们座落在世界上最高的西藏高原上. 西藏的“低地”无论什么地方都不低于海拔 12,000 英尺.

如果我们从珠穆朗玛峰的高度中减去 12,000 英尺，那末，我们可以说，它的峰高在它座落于其上的大地上面仅 17,000 英尺.

这并不是可以不屑一谈的. 按照这个标准（从底到顶，而

① 后来我查明白了. 卡斯滕士山现在正式的名字是苏第曼（Sudirman）山脉的查亚（Djaja）峰. 原注.

不是从海平面到顶)，还有没有比珠穆朗玛峰高的山呢？有的，的确有一座，这个新的最高山峰不在喜马拉雅山，也不在亚洲，也不在任何大陆上面.

这毕竟是有道理的．试设想在一个相当小的岛屿上有一座山，这个岛屿可能就是一座山，人们对这座山印象不深，因为它连同基底一起矗立在海洋深处，而且通过波涛的冲打，人们知道这座山坡高约多少英尺.

事实上，就有那么一个海岛，就是夏威夷岛——夏威夷群岛中最大的一个岛. 面积为 4,021 平方英里的夏威夷岛 (约为特拉华州的两倍)，实际上是一座伸出太平洋的大山. 它有四个山峰，两个最高的为莫纳克亚山和莫纳洛亚山（见表 13).

构成夏威夷岛的那座山实际上是座火山，不过大都已经死灭，只有莫纳洛亚山还在活动. 从它包含的岩石体积来看，这座山的整体是世界上最大的单个山．可以想象，包括海面上下整个这座山该有多大.

莫纳洛亚山中央喷口的凹处有时还在活动，但有史以来实际上未曾爆发过. 烙岩流从两侧的开口流出，最大的开口叫基拉韦厄 (Kilaues)，位于莫纳洛亚山的东侧，高约海拔 4,088 英尺（0.77 英里或 1,246 米)．基拉韦厄是现在世界上最大的活动火山口，直径在两英里以上.

这些特征似乎并不充足，但是如果作为一个整体来看的话，这座巨大的、我们称之为夏威夷岛的四峰山就极为令人惊叹了．只要测出海洋的深度就会发现，夏威夷岛是座落在海面下超过 18,000 英尺的地基上.

如果把海洋从地球表面搬走（劳驾，只是暂时搬一搬)，那末，地球上就没有一座单独的山能够与令人惊叹的高耸云霄的巍巍夏威夷山相比．如果从底到顶来算，它一定是地球上

最高的山．它在这个底基上的高度为 32,036 英尺（6.05 英里或者 9,767 米）．它是地球上唯一从底到顶超过 6 英里的山．

海洋搬走后将展现出一个类似的、虽然比较小的耸立在大西洋中的山峰，它是大西洋中山脉的一部分．这个山脉大部分我们还不知道，因为它为海洋所淹没，但是它比陆地上的任何山脉，甚至比喜马拉雅山都大，都长，都壮观．它有 7,000 英里长，500 英里宽，那是了不起的．

这个山脉的一些最高的山峰，它们的山顶都伸出大西洋洋面，这就形成了包括由九个岛组成的一群岛和一些小岛(属葡萄牙）在内的亚速尔（Azores）群岛，它们位于葡萄牙以西大约 800 英里的地方，总的土地面积为 888 平方英里，比美国罗得（Rhode）岛小得多．

亚速尔群岛的最高点在这个群岛的皮科（Pico）岛上，这就是上皮科山（又名“高山”），高达海拔 7,460 英尺（1.42 英里或 2,274 米）. 但是，如果沿着山坡向下滑去直达海底的话，那你就会知道此山只有四分之一露出水面．

上皮科山从水下的底基到山峰之巅的总高度约为 27,500 英尺（5.22 英里或者 8,384 米），这就等于象喜马拉雅山峰的高度．

当我们暂时把海洋从地球上移开时，我们或许还可看到海洋有多深．

海底大约有百分之一点二低于海面 6,000 多米，在这样的海底处有各种各样“深沟”．这种深沟数量很大，大多在太平洋海底．深沟全都靠近列岛，据推测，形成深渊和隆起列岛是属同一过程．

迄今有记载的几个深渊的最大深度（根据我所获得的材

表 14　一些海洋的深沟

| 深　　沟 | 大　概　位　置 | 深 | 度 | |
|---|---|---|---|---|
| | | 英尺 | 英里 | 米 |
| 巴特莱特(Bartlett) | 古巴南 | 22,788 | 4.31 | 6,948 |
| 爪哇(Java) | 爪哇南 | 24,442 | 4.64 | 7,252 |
| 波多黎各(Puerto Rico) | 波多黎各北 | 30,184 | 5.71 | 9,392 |
| 日本(Japan) | 日本南 | 32,153 | 6.09 | 9,800 |
| 千岛(Kurile) | 堪察加(Kamchatka)东 | 34,580 | 6.56 | 10,543 |
| 汤加(Tonga) | 新西兰东 | 35,597 | 6.75 | 10,853 |
| 马里亚纳 | 关(Guam)岛东 | 35,800 | 6.79 | 10,915 |
| 棉兰老 | 菲律宾(Philippines)东 | 36,198 | 6.86 | 11,036 |

料）如表 14 所示．

当然，这些深渊的深度决没有象山的高度那样可靠，我说不上什么时候某艘海洋调查船将会测出更深的深度．

有记载的棉兰老伍（Mindanao）深沟的最大深度——也是全世界为最——只是近在 1959 年 3 月才由俄国海洋调查船《勇士号》测出的．

## 基拉韦厄火山

莫纳洛亚山是世界上最大的山体，连同莫纳克亚山一起实际上构成了夏威夷岛．莫纳洛亚山的意思是“长山”，这是个合适的名字，因为从它一端到另一端长 76 英里，莫纳克亚山的意思是“白山”，因为它山顶常年积雪．山顶积雪意味着英纳克亚山是座暂死的火山；但莫纳洛亚山是活动的，它的近旁是基拉韦厄火山（见图示）．基拉韦厄火山是世界上最大的火山口，面积有四平方英里．

基拉韦厄火山并不以壮观的火山爆发而闻名，相反地，它总是处于将爆发未爆发的状态．在这个火山口里面是个沸腾的熔岩湖，熔岩偶而上涨溢出．有时成为滚滚洪流，持续很长时间，在 1935 年甚至威胁到岛上最大的希洛（Hilo）城．



图 27 基拉韦厄火山

土著夏威夷人把基拉韦厄火山最为活动的喷口看做是火神皮利（Pele）的住所——如果我们假定神仙是存在的话，这是有道理的．

然而，这里有着奇妙的巧合．夏威夷的火神是皮利，而在马提尼克（Martinique）岛上有一座叫做泊莱（Pelée）的山．这两个名字除字面外毫无共同之处，因为“Montagne Pelée”在法语里就是“秃山”的意思（或者“pealed”山，如果你想保留语音的话），这是由于山顶赤裸的缘故．

可是，这个名字是注定了的，因为珀莱是座火山，这正是山顶赤裸的原因所在．人们并不认为它是一座非常厉害的火山，因为 1792 年和 1851 年的两次小爆发没有给人留下什么印象．可是后来在 1902 年 5 月 8 日，这座山突然爆发，崩泻的熔岩顺着山坡直冲到马提尼克当时的首府圣皮坎尔（St. Pierre）．一度是座 30,000 人口的城市，自那以后留下了 30,000 具尸体，只有两个人幸存．

## 雅克 ·皮卡德 (Jacques Piccard) 和唐 ·沃尔什 (Don Walsh)

实际上于 1960 年 1 月 23 日乘坐深海潜水器《特里雅斯特》（Trieste）号曾亲自到达过马利亚纳（Mariana）深沟的最深处．这地方已被命名为“挑战者深渊”，以纪念英国海洋调查船《挑战者》号．这艘船曾自 1872～1876 年巡游全部海洋进行科学考察，由此建立起了现代的海洋学．

在任何情况下，海洋的深度总是大于山的高度，我现在想从几个地方来说明这一点．

请看看棉兰老深沟的最大深度，如果把珠穆朗玛峰放进去，那整座山能安详地座落在里面，山顶将沉没在波涛之中，而且有 7,000 英尺（$1\frac{1}{3}$英里）深的海水在山顶上翻滚；如果把夏威夷岛从现在的位置向西移动 4,500 英里，把它沉入棉兰老深沟的话，那它将完全消失，它的顶上有 4,162 英尺（$\frac{4}{5}$英里）高的水流动．

如果以海平而为标准，那末地球上整个大陆表而的最低点就在菲律宾，它处于珠穆朗玛峰最高点以东约 3,200 英里的地方．总的高差为 65,339 英尺（12.3 英里或 19,921 米）．

这听起来好象很大，但地球的直径约为 7,900 英里，所以这高低之差只是地球总厚度的百分之零点一五．

如果地球缩成象我书房里的地球仪那样大（直径为 16 英寸），那末，珠穆朗玛峰之巅仅仅高出表面 0.011 英寸，而棉兰老深沟则将沉到表而以下仅 0.014 英寸的地方．

因此可以看到，尽管我已经谈及极端的高和极端的低，但地球的表面从其与地球大小的比例看来还是非常平坦的；即使把海洋移去，让洋底的高低不平暴露出来，它还将是平坦的．当海洋将地球上的大多数坑坑洼洼填满（把最高低不平

的地方加以覆盖）时，剩下的也就一无所有了.

还是让我们再来考查一下海平面吧．如果地球是一个世界海洋的话，那它将呈旋转椭球形状，因为地球是在旋转着，它将不是一个正确的椭球形，有种种理由可以说明到处有几英尺的偏差．关于这一点，只有高度学术性的研究才会对这种偏差感兴趣．就我们的目的而言，我们对椭球已经可以满意了.

这就是说，如果用一个平面通过地球中心和两极把它对半切开的话，那末横截面的轮廓将是一个椭圆．短轴（即地球最短的可能半径)是从中心到其中的一个极，长为 6,356,912 米．最长的半径即长轴是从中心到赤道上任意一点，为 6,378,388 米长（如果我们考虑到赤道本身边缘略呈椭圆状的话，则这就是平均值）.

因此，赤道海洋的水平面同中心的距离比极地海洋水平面的要远 21,476 米（70,000 英尺或 13.3 英里）．这就是著名的“赤道隆起”.

不过，这种隆起并不是仅存在于赤道．从中心到海洋水平面的距离随着海平面从极地到赤道面平滑地增加．可惜，我从来没有看到过关于地球半径在不同纬度上的超长度（即超出极地处的最短长度）的数据.

因此，我不得不利用引力场按纬度变化的规律进行计算（我能够找到关于引力场的数据)．我希望计算结果无论如何是近似正确的，见表 15.

现在，让我们从极地海平面面不是从任何老的海平面来测量山的高度．这将用来比较离地球中心的距离，而且这肯定又是一种合理的比较山峰高度的方法.

如果我们这样做了，我们便马上就会看到事情完全改观.

表 15　地球的隆起

| 纬　　度 | 地　　球　　半　　径　　的　　超　　长　　度 | | |
|---|---|---|---|
| | 英　　尺 | 英　　里 | 米 |
| 0°（赤道） | 70,000 | 13.3 | 21400 |
| 5° | 69,500 | 13.2 | 21200 |
| 10° | 68,000 | 12.9 | 20800 |
| 15° | 65,500 | 12.4 | 20000 |
| 20° | 62,300 | 11.3 | 19000 |
| 25° | 58,000 | 11.0 | 17700 |
| 30° | 52,800 | 10.0 | 16100 |
| 35° | 47,500 | 9.0 | 14500 |
| 40° | 41,100 | 7.8 | 12550 |
| 45° | 35,100 | 6.65 | 10700 |
| 50° | 29,000 | 5.50 | 8850 |
| 55° | 23,200 | 4.40 | 7050 |
| 60° | 17,700 | 3.35 | 5400 |
| 65° | 12,500 | 2.37 | 3800 |
| 70° | 8,250 | 1.56 | 2500 |
| 75° | 4,800 | 0.91 | 1460 |
| 80° | 2,160 | 0.41 | 660 |
| 85° | 530 | 0.10 | 160 |
| 90°（极地） | 0 | 0.00 | 0 |

例如，棉兰老深沟下沉在海面以下 11,036 米的地方，但这是指在它自己纬度（北纬 10°）处的海平面以下．这个海平面比极地海平面高 20,800 米，因此棉兰老深沟的最大深度还比极地海平面高 9,800 米（6.1 英里）左右．

换句话说，当皮尔里（Peary）站在北极的海冰上时，比他在一个探索棉兰老深沟底部的深海潜水器中时更靠近地球中心 6 英里．

当然，北冰洋有它自已的深度．我相信，北冰洋有记载的

深度为 45,00 米（2.8 英里）. 这意味着，北冰洋的底比棉兰老深沟更接近地球中心将近 9 英里，从这个观点看来，我们有了“最深的海沟”这个称号的一个新的候选者，（南极区为南极大陆所占据，因此在这方面未列入比较.）

那末，山怎么样呢？

珠穆朗玛峰位于纬度 30.0°附近，那里的海平面比极地海平面高 16,100 米. 将此数加到珠穆朗玛峰本身的海拔高度 8,886 米上，你就发现，这座山比极地海平面将近高 25,000 米（15.5 英里）. 但它比赤道海平面只高 2.2 英里.

换句话说，当一艘船正通过赤道时，它的乘客离地球中心的距离比站在珠穆朗玛峰之巅的希勒利只近 2.2 英里.

按照这个新标准，还有没有什么山可以比珠穆朗玛峰更适合于作此比较呢？亚洲还有一些高山跟珠穆朗玛峰同处于差不多的纬度. 例如阿空加瓜山和安第斯山脉的一些其他高峰（虽然在赤道的另一边）.

麦金莱山稍高于北纬 60.0°，因此它的海平面比极地海平面仅高 5,000 米左右，它在极地海平面以上的总高度仅为 11,200 米（7.0 英里），这还不及珠穆朗玛峰高度的一半.

不，我们需要的是靠近赤道的理想的高山，在这种地方的高山，可以充分利用地球腹地的最大隆起. 一个好对象是非洲最高的山乞力马扎罗山. 它约在南纬 3.0°，高 5,890 米，再加上座落其上的 21,300 米高的隆起，因此如从地球中心算起，它比极地海平面高约 27,200 米（16.9 英里），或比珠穆朗玛峰高近 1 英里半.

但这还不是最理想的. 按照这些标准，我选中的最高山峰是厄瓜多尔的钦博拉索（Chimborazo）峰. 它是安第斯山脉

的一部分，这里至少有三十座比钦博拉索峰高的山峰．然而，钦博拉索峰位于南纬 2.0°．它本身高出于海平面为 6,300 米．如果加上赤道隆起，则极地海平面以上的总高度达 27,600 米（17.2 英里）．[①]

如果我们取离地球中心的距离，那末，我们就可以从北冰洋之底到钦博拉索峰之巅，从面把距离增加 32,100 米，即差不多为 20.0 英里——一个整齐的偶数．

由于着眼点不同，我们有了三个不同的地球上最高山峰的候选者：珠穆朗玛峰、莫纳克亚山和钦博拉索峰；我们还有两个不同的最深的深渊候选者；北冰洋底和棉兰老深沟底．

可是，让我们面对现实吧！在认识极端的深度和高度时所要考虑的不光是距离，还要考虑到达那里的困难程度．衡量潜深的困难程度的一个最重要的标准是水压的增加，面衡里登高的困难程度的一个最重要的标准则是气压的减小．

照此说来，水压在棉兰老深沟底部最高，而气压在珠穆朗玛峰之巅最低，因此这是实际中的两个极端．

# 17 地球上的岛

我写科学小品文最使人愉快的事情之一是给我带来了信件——几乎总是令人高兴和饶有兴味的．

例如，想到上一章《地球上的高处和低处》，我曾维护波士

① 自从本文初次发表以来，另有一些人已宣称钦博拉索峰是世界上最高的山，这条新闻相当令人激奋地已载于《科学美国人》与《新闻周刊》．这两家刊物都没有注意到本文的领先地位．原注．

顿的普鲁登谢尔大厦是北美大陆上最高的办公大楼的说法（相对于在曼哈顿岛上有更高的大厦而言）．此文初次发表后，我当即收到了大波士顿的一个居民寄来的明信片，劝我沿着查尔斯（Charles）河和尼庞塞特（Neponset）河上溯到它们的发源地，看看波士顿也可不可以算做一个岛．

在某种程度上他是正确的，我听从了他的劝告．查尔斯河向波士顿北面流去，而尼庞塞特河向它南面流去．它们在波士顿西南部靠拢，相距不到二英里半．有一条小川穿过这个间隔地带从这一条河婉蜒流到另一条河，以致波士顿的大部分地区和一部分西郊地区（包括我住的地方）[①]四面八方都被地表水团团围住．因此，普鲁登谢尔大厦和我的房子在一个有语言纯正癖的人看来，也可以认为在一个岛上．

啊唷！

不过，在我产生惊恐之前，还是先让我停下来考虑一下．不管怎样，先要弄清楚岛是什么？

“island（岛）”这个词源出盎格鲁撒克逊语“eglond”，这个词从字面上来说可能意为“水地”；就是“水包围的陆地”．

这个古代英语词随着岁月流逝，经历了自然变迁，传到我们手里应该是“eyland”或“iland”．“s”则是受“isle（“岛”）这个词的影响而误讹加上的．说来也奇怪，“isle”只跟“island”是同义词，并无词源关系．

至于“isle”，我必须追溯到古典时代．

古希腊人在强盛时期是以航海为业的，居住在地中海的许多岛屿和大陆各地．他们和后来的古罗马人都完全知道这两种类型陆地显然是根本不同的．在他们看来，一个岛屿是海包围着的一块相当小的陆地．而大陆（希腊和意大利是它

---

① 后来没有再住在那里过．如我上面已说过的，我回到了纽约．原注．

的一部分）则是连续的陆地，不知道有什么边界．

诚然，古希腊地理学家们认为，陆地表面是有限的，大陆除西边外都被海洋的水面团团围住，这是纯理论．在西边，出了直布罗陀（Gibraltar）海峡，地中海实际上展现成浩瀚的海洋．然而，古希腊人或者古罗马人都没有成功地经由陆路到达过瑞典的拉普兰（Lapland）、南非或者中国，以便站在大陆的边缘亲眼看看海洋．

因此，在拉丁语里，大陆是 *terra continens*；意思是“连在一起不破的陆地”．这个概念是说，当你在大陆上旅行时，总是有另一块陆地连着你正在通过的那一部分陆地．没有尽头．这个短语传到我们手里就是“continent（大陆)”这个词．

另一方面，不和大陆连在一起，不破的一小块陆地独立地并被海包围起来，叫做 *terra in salo* 即“海洋中的陆地”，这在拉丁语里缩短成 *insula*，后来又相继缩短，在意大利语里为 i*sola* 英语为 isle，法语为 *ile*．

因此，词“isle”，（从外延来说还有词“island”）的严格意义是指被咸水包围的陆地．当然，这无疑过于严格了．它将使曼哈顿岛的地位变得非常捉摸不定，因为其西边以哈得孙（hudson）河为界．所以，必定有些通常被称为岛屿的陆地安卧在湖泊或河流中间，它们当然是被淡水包围住的．不过，即使是这种岛屿，也必定被一片同岛的直径相比为相当大的深深的水所包围，而决不会有人单单因为一大片陆地被一条小河划分出来而想称它为一个岛．因此，从实际上说，波士顿不是一个岛，而曼哈顿是一个岛．

然而，拿本文的下一部分论述的目的来讲，我打算坚持这个术语的严格定义，只讨论那些为咸水所包围的岛屿．

照这样下去，那末更严格地说来，地球的陆地表面完全是由岛屿构成的．就这个词的字面意义面言，不存在什么大陆．大陆决不会没有尽头，意大利旅行家、威尼斯人马可孛罗于 1275 年到达古代所知道的大陆的东部边缘．葡萄牙航海家巴托罗缪·狄亚斯（Bartholomew Diaz）于 1488 年到达其南端；一些俄国探险家在 17 世纪和 18 世纪初标出了它的北端．

我这里所指的大陆是通常所认为的由欧亚非三大洲所组成．可是，为什么一定是三大洲呢？如果略去河流和人工的苏伊士运河的话，则它们只是单独的连绵一片的陆地．

洲的多元观念要追溯到古希腊时代．古希腊人在荷马时代聚居在希腊大陆，面对着爱琴海东边一个不友好的第二大陆．最早的希腊人没有理由猜想，这两个大陆之间有陆地相连．他们给这两个大陆以不同的名字：他们自己这个大陆叫欧罗巴，另一个大陆叫亚细亚．

这两个名字的起源还不确知，仅是推测．我最欣赏的推测认为它们源出闪米特语单词*assu*和*erev*[①]，意思分别为“东”和“西”．（一如他们袭取腓尼基语的字母系统，古希腊人可能也是通过克里特人从腓尼基语获得这些词的．）公元前 1200 年的特洛伊战争开始了从字面上来说的西方和东方之间的对抗，我们至今仍处于这种对抗之中．

当然，希腊探险家在这场角逐的早期一定已经知道，这两个大陆之间的确有陆地相连．伊阿宋（Jason）和阿耳戈英雄（Argonants）以及他们寻觅金羊毛的神话[②]或许反映了特洛

① 闪米特语是指古代巴比伦人、亚述人、希伯莱人和腓尼基人；近代主要指阿拉伯人、犹太人的闪含族语系闪语族的语言．译者注．

② 系希腊神话．此两人历尽千辛万苦到海外觅取金羊毛．译者注．

伊战争之前的贸易远征.阿耳戈英雄到达过科耳基斯(Colohis，位于黑海的东端)，两个大陆就在那里连结.

诚如我们现在所知，黑海北岸有1500英里长，一个旅行者可以取道这片 1500 英里长的连接地从爱琴海的一边到另一边——从欧洲到亚洲并返行．因此，只是由于地理学上的约定，欧亚两洲才成为两个分离的陆地，它们之间实际上是没有边界的，这块联合的陆地常常被称为“欧亚大陆”.

地理书上任意地把乌拉尔山脉定为欧亚两洲的边界，这是由于乌拉尔山脉代表着一片广大的自德国至太平洋绵延6000多英里的平原的一个适当的间断；另一方面是由于政治方面的原因，考虑到俄国（它直至大约1580年之前一直局限于乌拉尔山脉以西的区域）的欧洲部分．但是，欧亚大陆的亚洲部分远大于其欧洲部分，以致欧洲常常被看作只不过是欧亚大陆的一个半岛.

比起欧洲来，非洲远为接近于一个单独的洲．它同欧亚大陆之间唯一的陆地连接是苏伊士地峡．现在它大约宽 100 英里，而在古代则比较狭窄.

那里曾经还有连结通道，曾是一条很好的旅行道路，普通百姓（也有军队）时而来往其间，他们反而很少穿越黑海北面的陆地．古希腊人当时已知道他们称之为叙利亚和埃及的那两个国家之间有联系，因此把埃及和它西面的陆地看做亚洲的一部分.

在古罗马人看来，就是另一番情景了．他们离苏伊士地峡比较远，在他们的早期历史里，对这个连接地仅限于学术上的兴趣，他们只通过海洋同非洲联系．而且，像古希腊人隔海对峙着对面大陆上的特洛伊一样，古罗马人——一千年以后——也隔海对峙着对面大陆上的迦太基人，同汉尼拔的斗

争之对于古罗马人的严重性不亚于同希克托（Hector）[1]国的斗争之对于古希腊人．

迦太基人用来称呼他们城市周围地区的一个词在拉丁语里变为 Africa（非洲）．在古罗马的意识里，这个词从迦太基的毗邻地区（今突尼斯北部）延伸到古罗马人自己感到所面临的整个大陆．因此，古罗马时代——特别是希腊-埃及托勒密王朝——的地理学家们给予非洲以第三大陆的地位．

还是让我们面对事实吧，略去那些历史的偶然事件不谈．如果不算苏伊士运河，我们就能够不用涉越咸水便可从好望角旅行到白令海峡，或者到葡萄牙或拉普兰，于是整片陆地成为单一的大陆．这个单一的大陆尚无为人们普遍接受的名字，称它为“欧亚非大陆”是很滑稽的，而我有时产生需要这样做的强烈愿望．

不过，我们也可以这样考虑，这片陆地是广大的，但它是有限的，它四周均被海洋包围，因此，它是一个岛，当然是一个巨大的岛，但毕竟是一个岛．如果我们考虑到这一点，那末它便有了名字，这个名字有时为地缘政治论者[2]采用．它就是“世界岛”．

这个名字似乎意味着欧亚非三大洲构成了整个世界，这你也知道，几乎是这样．试见表 16．(让我指出，在此表中和本文以下的各表中，面积的数字是准确的，但那些人口的数字则往往是很不可靠的，我曾试图用自己的藏书核实一下六十年代中期的人口数字[3]，但我始终未能如愿以偿，而且，即使给出这种数字时，也每每都注上“估计”的字样，可能大大失

① 荷马史诗中的勇士．译者注．

② 一种为帝国主义侵略作辩护的反动理论．译者注．

③ 这次印的是 70 年代中期的人口数字．原注．

表16　世　界　岛

| | 面积（平方英里） | 人　　口[①] |
|---|---|---|
| 亚　洲 | 16,500,000 | 1,950,000,000 |
| 非　洲 | 11,500,000 | 336,000,000 |
| 欧　洲 | 3,800,000 | 653,000,000 |
| 世 界 岛 | 31,800,000 | 2,939,000,000 |

实…….不过，还是让我们尽力而为吧.）

世界岛占地球陆地总面积一半稍多一些．甚至更为重要的是，它拥有地球人口的四分之三．它完全称得起这个名字．

在面积和人口上唯一的、甚至是很勉强的同世界岛可作比较的陆地是美洲大陆．它最初是由原始亚洲人在好几千年之前发现的，公元 1000 年时重又为冰岛航海家莱夫·埃里克森（Leif Ericsson）所发现，最后则于 1497 年为意大利航海家焦伐尼·卡博托（Giovanni Caboto），按照雇用他的英国叫法是约翰·卡博特（John Caboto）所发现……我之所以没有提哥伦布（Columbus），是因为他在 1497 年只是发现了这些岛，他在 1498 年前未曾到过美洲大陆.

哥伦布认为新大陆是亚洲的一部分，它的确可能是这样.从自然地理学上来讲，它之完全独立于亚洲，只是到了 1726 年才得到证实．那一年丹麦航海家维图斯·白令（Vitus Bering，为俄国人所雇用）探索到今天所称的白令海，并航海穿过今天所称的白令海峡，从而证明西伯利亚和阿拉斯加是不相连的.

① 本文初次发表于 1966 年 6 月．在以后的岁月里，人口当然增长了．因此，我已将本文的表全部加以改动，以反映这种增长．原注.

因此，地球上有了第二个巨大的岛，这个岛传统上分为两个洲：北美洲和南美洲，可是，如果略去人工的巴拿马运河的话，这两个岛是相连的，因此一个人可以不涉越咸水就从美国北部的阿拉斯加旅行到阿根廷的巴塔戈尼亚（Patagonia）.

这两个相连的洲没有方便的名字.可以称为“两美大陆”，但这是把一个复数名称用于单一的陆地，因而我不想用它.

我想我来提它二个名字，叫做“新世界岛”. 这是把两美大陆用一个大写的普通词组（如果按老式的说法）“新世界”来表示. 它也表明了“世界岛”和“新世界岛”之间的关系跟英国和新英格兰（美）之间或约克郡（英）和纽约（美）之间的关系属于同一种类型.

关于新世界岛的主要统计数字示于表 17. 如表所示，新世界岛的面积约为世界岛的一半，但人口只有它的六分之一多一点.

表 17 新世界岛

| | 面积（平方英里） | 人口 |
|---|---|---|
| 北美洲 | 9,385,000 | 321,000,000 |
| 南美洲 | 7,035,000 | 190,000,000 |
| 新世界岛 | 16,420,000 | 511,000,000 |

另外有两块大得足可当作洲看待的陆地，还有一块陆地则是模棱两可的，通常认为它作为一个洲，实在太小了. 按面积大小的次序是：南极洲（以其覆盖冰层计）、澳大利亚和格陵兰（Greenland）.

格陵兰几乎无人居住，因此我想（作为纯粹的形式）把它列入我可称之为“大陆岛”的那一组，于是就可以把它归类掉.这样，我就可以转面把比格陵兰小的陆地汇集成一个组.

表18 大 陆 岛

| | 面积（平方英里） | 人　　口 |
|---|---|---|
| 世 界 岛 | 31,800,000 | 2,939,000,000 |
| 新世界岛 | 16,420,000 | 511,000,000 |
| 南 极 洲 | 5,100,000 | …… |
| 澳大利亚 | 2,970,000 | 12,550,000 |
| 格 陵 兰 | 840,000 | 47,000 |

表 18 列出关于大陆岛的数据.

剩下的陆地——都小于格陵兰——就是我们通常所说的“岛屿”. 因此，本文从现在开始，每当说到“岛屿”时，都是指比格陵兰小、完全为海洋所包围的陆地.

这样的岛屿有好几千个，它们代表着决不可忽视的地球的一部分陆地表面，总计起来（尽我能及的近似估计），这些岛屿的总面积约为 2,500,000 平方英里——因此，它们总共加起来抵得上一个洲的大小，面积几乎有澳大利亚那样大；总人口约为 400,000,000，这成为一个洲，甚至比面积更过得硬，比北美洲的总人口绰绰有余.

让我们作此估计，这样每 10 个人中就有 1 个人住在一个比格陵兰小的岛屿上.

关于岛屿，我们可以提出一些有用的统计数字. 首要的而且又最突出的数字就是岛屿的面积. 五个面积最大的岛屿，列于表 19.

最大的岛新几内亚长度延伸达 1,600 英里. 如果把它迭于美国之上，则它将从纽约延伸到丹佛（Denver）. 它的面积比得克萨斯（Texas）州大百分之十五. 它拥有除世界岛和新世界岛以外最大和最高的山脉，居住着世界上最原始的人.

表 19 最大的岛屿[1]

| | 面积（平方英里） |
|---|---|
| 新几内亚(New Guinea) | 312,329 |
| 婆罗洲(Borneo) | 290,285 |
| 马达加斯加(Madagasca) | 230,035 |
| 巴芬(Baffin) | 201,600 |
| 苏门答腊(Sumatra) | 163,145 |

五个最大岛中的其他两个岛，它们和新几内亚同是一个岛群的成员．新几内亚、婆罗洲和苏门答腊习惯上同称为“东印度群岛”的组成部分．这个群岛散布在亚洲和澳大利亚之间范围达四千英里的海洋上，构成世界上最大的岛群．这个群岛的面积将近一百万平方英里，约占全世界岛屿面积的百分之四十；可能拥有人口 121,000,000，即约占全世界岛屿人口的百分之三十．

马达加斯加在某一点上看来象一个向西往印度洋另一端方向移动了四千英里的东印度岛．它的形状同苏门答腊相仿，大小介于苏门答腊和婆罗洲之间．甚至它的土著居民在血统上更接近于东南亚，而不是近邻的非洲．

五大岛中只有巴芬岛不属于这个范围．它是属于位于加拿大北方的那个群岛的成员，位于哈得孙湾口和格陵兰海岸之间．

说来奇怪，就人口而言，这五个最大的岛屿没有一个算得上大岛，实际上，有三个大岛屿（没有一个属于上述五个最大岛屿之列的）拥有的人口大大超过世界全部岛屿人口的半数．

① 近来，人们更习惯于使用居民们所使用的地理名字．例如，婆罗洲实际上就是加里曼丹．而我在各个场合将使用大家比较熟悉的名字．原注．

人口最稠密的那个岛屿，也许广大美国人还不知道它的名字，它就是本州．在你填补这个空白之前，让我来解释一下，它就是日本列岛的最大者，东京就在这个岛上．

这三个岛屿见表 20．

表 20　人口最多的岛屿

| | 面积（平方英里） | 等　级 | 人　　口 |
|---|---|---|---|
| 本　　州 | 91,278 | 6 | 83,000,000 |
| 爪　　哇 | 48,504 | 12 | 78,000,000 |
| 大不列颠 | 88,133 | 7 | 56,000,000 |

爪哇在大岛中无疑是人口最稠密的（我说“大岛”是为了排除象曼哈顿那样的小岛）．它的人口密度达每平方英里 1,600 人，恰为欧洲人口密度的九倍．它是欧洲人口最稠密的国家荷兰的人口密度的 $1\frac{3}{4}$ 倍．荷兰是个高度工业化的国家，而爪硅基本上是农业的，这就更其引人注目了．人们一般总认为一个工业化地区的人口要比一个农业地区的人口多．（诚然，荷兰的生活水准远远高于爪哇．）

远远落在这三个大岛后面的是另外四个岛，每个岛人口都超过一千万．请见表 21．（顺便指出，九州是日本列岛中的又一个岛．）

表 21　人口中等的岛屿

| | 面积（平方英里） | 等　级 | 人　　口 |
|---|---|---|---|
| 苏门答腊 | 163,145 | 5 | 20,000,000 |
| 台　　湾 | 13,855 | 34 | 15,000,000 |
| 锡　　兰[①] | 25,332 | 24 | 15,000,000 |
| 九　　州 | 14,791 | 31 | 12,000,000 |

① 更为严格地讲，锡兰应称为斯里兰卡．原注．

注意，这七个人口最多的岛屿都在东半球，全都跟世界岛有一定距离，或者在世界岛和澳大利亚之间．西半球人口最多的岛又是一个大多数美国人可能叫不出名字的岛．那就是伊斯帕尼奥拉（Hispaniola）岛，海地和多米尼加共和国都在上面，它的人口为 9,000,000．

人们一般都认为强国在大陆．历史上强国除一个而外全都在世界岛上（一个例外是美国）．

大陆国家在强国中占统治地位的一个重要例外是大不列颠[①]．在近代，证明日本又是个例外．事实上，大不列颠和日本是仅有的两个在全部中世纪和现代史始终保持完全独立的岛国．

然而，今天已经有不下于三十个岛屿国家（除非我有遗漏，我相信，如果有遗漏的话，我将会迅即得到慷慨的读者们的启发的），三十个独立的国家，也就是说它们的领土在一个岛上或者岛群上，它们在世界岛或者新世界岛上没有什么重要的基地．

澳大利亚是这些国家之一，实际上，按通常习惯它是一个大陆国家，但我把它包括进去，以臻统一．这三十个岛的国家（包括澳大利亚）依人口顺序列于表 22[②]．

此表简短说明如下：首先，大不列颠地区作为一个岛屿和一个国家之间所存在的差异乃是由这样一个事实造成的：作为一个国家，它还包括一些在其本土岛屿之外的地区，特别是北爱尔兰．印度尼西亚包括上面提到的那个叫做东印

① 我不准备把英格兰、大不列颠、联合王国和不列颠列岛区别开．不过，如果我愿意的话，我是能够做到的，这一点请你不用担心！原注．

② 在本文于九年前初次发表时，还只有二十个岛屿国家．自那时以来，又有十个岛或者群岛取得独立，所以我现在作了一个修正表，并附上最新的人口数字，以反映这一事实．原注．

表22 岛 屿 国 家

| | 面积（平方英里） | 人　　　口 |
|---|---|---|
| 印度尼西亚 | 735,268 | 121,000,000 |
| 日本 | 142,726 | 105,000,000 |
| 大不列颠 | 94,220 | 56,000,000 |
| 菲律宾 | 115,707 | 37,000,000 |
| 澳大利亚 | 2,971,021 | 12,500,000 |
| 斯里兰卡 | 25,332 | 12,500,000 |
| 古巴 | 44,218 | 8,500,000 |
| 马达加斯加 | 230,035 | 7,500,000 |
| 海地 | 10,714 | 5,000,000 |
| 多米尼加共和国 | 18,816 | 4,000,000 |
| 爱尔兰 | 27,135 | 3,000,000 |
| 新西兰 | 103,376 | 2,900,000 |
| 新加坡 | 224 | 2,200,000 |
| 牙买加 | 4,232 | 2,000,000 |
| 特立尼达 | 1,980 | 950,000 |
| 毛里求斯 | 720 | 900,000 |
| 塞浦路斯 | 3,572 | 630,000 |
| 斐济 | 7,055 | 575,000 |
| 马耳他 | 122 | 330,000 |
| 科摩罗 | 864 | 300,000 |
| 巴巴多斯 | 166 | 275,000 |
| 巴林 | 256 | 230,000 |
| 巴哈马 | 5,382 | 215,000 |
| 冰岛 | 39,768 | 210,000 |
| 西萨摩亚 | 1,097 | 150,000 |
| 马尔代夫群岛 | 115 | 115,000 |
| 格林纳达 | 133 | 110,000 |
| 汤加 | 269 | 100,000 |
| 圣多美 | 372 | 69,000 |
| 瑙鲁 | 8 | 8,000 |

度的群岛的大部分但不是全部．

实际上，所有的岛屿人民现在都是独立岛国的组成部分，至今仍是殖民地的最大的岛屿地区是巴布亚新几内亚[①]，即新几内亚岛的东半部，它有面积 182,700 平方英里，人口 2,300,000，受澳大利亚管理．我实在不知道该把波多黎各归于哪一类．它在相当程度上是自治的，但如果把它算作一个美国殖民地的话，则我认为它可算是剩下来的人口最多（人口为 2,700,000）的非独立岛屿．

由表 22 可知，人口最多的岛国不是日本，也不是大不列颠，而是印度尼西亚．事实上，它是世界上人口占第五位的国家．只有中国、印度、苏联和美国（面积上全都是大国）人口比印度尼西亚多．

占地不到单独一个岛屿的岛国只有三个，即海地和多米尼加共和国（它们共占伊斯帕尼奥拉岛）和爱尔兰（东北六郡仍是大不列颠的组成部分）．岛屿有一部分属于以大陆为基地的国家的唯一岛国是印度尼西亚．婆罗州岛（它大部属于印度尼西亚）有一部分构成了以邻近的亚洲为基地的马来西亚这个新国家的一部分．新几内亚（其西半部属印度尼西亚）的东半部属于澳大利亚．

这些岛国里有 17 个城市人口超过百万．这些城市依人口递减次序列于表 23——我要告诫你们，有些数字是不怎么可信的．

在这些城市中间，东京无疑是突出的，因为它可能是世界上最大的城市．我说“可能是”是因为这个地位还有第二个候选者——上海．中华人民共和国的上海——一个陆地城

① 巴布亚新几内亚已于 1975 年 9 月 16 日宣告独立．译者注．

表23 岛屿城市

| 城市 | 国家 | 人口 |
|---|---|---|
| 东京 | 日本 | 11,400,000 |
| 伦敦 | 大不列颠 | 8,200,000 |
| 雅加达 | 印度尼西亚 | 4,500,000 |
| 大阪 | 日本 | 3,000,000 |
| 悉尼 | 澳大利亚 | 2,800,000 |
| 墨尔本 | 澳大利亚 | 2,400,000 |
| 横滨 | 日本 | 2,300,000 |
| 名古屋 | 日本 | 2,000,000 |
| 哈瓦那 | 古巴 | 1,700,000 |
| 京都 | 日本 | 1,400,000 |
| 神户 | 日本 | 1,300,000 |
| 马尼拉 | 菲律宾 | 1,300,000 |
| 苏腊巴亚 | 印度尼西亚 | 1,300,000 |
| 万隆 | 印度尼西亚 | 1,100,000 |
| 北九州 | 日本 | 1,050,000 |
| 札幌 | 日本 | 1,000,000 |
| 伯明翰 | 大不列颠 | 1,000,000 |

市——的人口有可能多达 11,000,000.

新世界岛上的最大城市纽约充其量在东京、上海和大伦敦之后居第四位．当然，纽约大部分在岛上，它只有一个区布朗克斯（Bronx）无疑是在大陆上．它还不是在象东京或伦敦所在的那种岛国上.

如果我们把纽约作为一个有疑问的事例而排除在外，那末，西半球最大的岛屿城市和世界这一半上唯一人口超过百万的岛屿城市是哈瓦那.

现在只剩下最后一项，即把岛屿的讨论局限于那些为咸水所包围的岛屿时，我们有没有出于迫不得已而略去了任何重要的淡水岛呢?

就大小（而不是就人口）而言，只有一个岛是值得提及的．它是一个河流岛，世界上（除巴西外）可能很少有人知道，它就是马拉若（Marajó）岛，象一个大篮球似地安卧在亚马孙（Amazon）河河口所形成的凹进处．

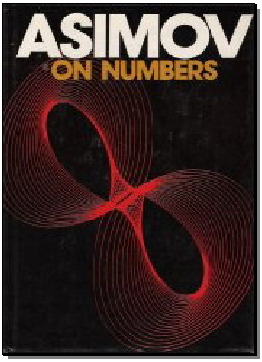
它宽一百英里，面积一万五千平方英里．如果把它算做一个真正的海岛的话，那它将列入世界最大的三十个岛屿之中，对于一个河流岛屿来说这当然是不错了．不过，它是一片低洼地，多沼泽，常常泛滥，又正处于赤道，几乎没有什么人住在那儿．

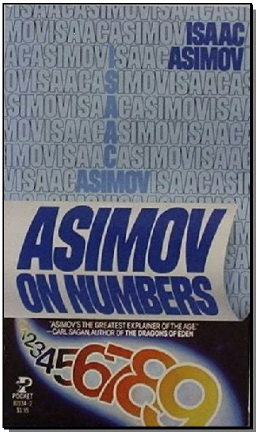
但是，仅仅是它的存在就表明了，亚马孙河是何等巨大！

封面设计　陶雪华

统一书号：13119·861
定　　价：　0.70元

附：原版书影




Ken777 校对及文字输入说明：

| 页码 | 说　　　　明 |
|---|---|
| 全部 | 本书插图除图 1 外，全部采用最接近原书插图的清晰图片代之。 |
| 全部 | 原书脚注按章编排序号，为阅读及排版方便，本书脚注均改为按页编排序号。 |
| 全部 | 原书加着重点文字用绛红色黑体字代替，如：“重点”显示为“**重点**”。 |
| 45 | 08 行：“一万亿分之一”：原书误为“一万亿之一”。<br>14 行：“可以通过 1000…”：原书误为“可以通 1000…”。 |
| 93 | 18 行：“一百万秒差距”：原书误为“一百万秒的差距”。<br>脚注：“祖冲之（公元 429～500 年）”：原书误为“祖冲之（公元 29～500 年）” |
| 109 | 09 行：“精确”：原书误为“确精”。<br>11 行：“精确到无限数位小数”：原书误为“精确到无数位小数” |
| 115 | 04 行：“我俩每天……”：原书误为“咱俩每天……”。 |
| 123 | 11 行：“其积为＋1.”：原书误为“或＋1.”。 |
| 115 | 14 行：“一口石（stone）铺子里的肉”之“口石”：未查到此字，疑为自造字。 |
| 208 | 13 行：“鰕虎鱼”之“鰕”，原书为“鱼叚”，未查到此字，用繁体代之。 |
| 238 | 16 行：“2,300 英尺”：原书误为“2,300 英里”。 |